SOBRE LA DINÁMICA DE LA INVERSIÓN EN EL MODELO DE CICLO ECONÓMICO DE KALECKI

Eduardo A. Rodríguez

Resumen

En la presente nota se analiza la estabilidad y monotonía de la inversión en el modelo de ciclo económico que Kalecki presentara en su libro "Teoría de la dinámica económica" (1954), la cual el autor realizara mediante argumentos intuitivos o mera inspección visual de las ecuaciones involucradas. Para ello utilizaremos la teoría de las soluciones de las ecuaciones en diferencias.

A fines comparativos, en un anexo se presentan otros dos modelos de ciclo económico del autor que nos ocupa, uno anterior de 1933 y otro posterior de 1968. Estos dos modelos, si bien difieren en el análisis de los determinantes de la inversión, generan una dinámica no muy diferente en sus aspectos formales a la presentada en su trabajo de 1954.

Abstract

In this paper I analyze stability and monotony of investment in the Kalecki's business cycle model presented in his book "Dynamic Economic Theory (1954)". The analysis made by this author is based on intuitive arguments or mere visual inspection of the equations involved. I revised these arguments using the theory of solutions of difference equations.

For comparison purposes, in the appendix I present two other business cycle models of Kalecki: one of 1933 and other of 1968. Beside the differences in the determinants of investment, these two models generate a similar dynamics to the model of 1954.

INTRODUCCIÓN

En su libro "Teoría de la dinámica económica" (1954) MichalKalecki realiza un estudio de los determinantes de la inversión en la generación de ciclos económicos, resaltando su relevancia a la hora de analizar los problemas del crecimiento y del desarrollo.

El modelo de ciclo económico allí expuesto, que discutiremos en el presente trabajo, se construye en cuatro etapas. Las primeras tres consisten en un análisis de la determinación del nivel de ganancias, ingreso bruto del sector privado e inversión, respectivamente. La cuarta y última consiste en combinar los resultados de las tres anteriores con una condición de igualdad ahorro-inversión, concluyendo así en un modelo de ciclo económico.

Una preocupación manifiesta en los trabajos de Kalecki es la construcción de modelos que puedan ser testeados empíricamente de manera sencilla con la información estadística disponible al momento de su elaboración. Es por ello que suele ir simplificando expresiones matemáticas progresivamente en su exposición. Tal estrategia le permite exponer de manera más directa la dinámica de las diferentes variables económicas involucradas, sin comprometer los resultados principales de su investigación.

Sin embargo, las conclusiones respecto a la existencia de fluctuaciones cíclicas en la inversión, como así también su estacionariedad, no es explicada por el autor de manera rigurosa.[1] Es por ello que aquí analizaremos estas cuestiones utilizando la teoría de la estabilidad de la solución de las ecuaciones en diferencias. Para ello comenzaremos realizando una exposición del modelo.[2]

1. EL MODELO MACRODINÁMICO DE KALECKI DE 1954

1.1 Determinación del nivel de ganancia de los capitalistas

En el capítulo 4, Kalecki presenta el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{cases} C_t = qP_{t-\lambda} + A \quad 0 < q < 1 \quad A > 0 \\ P_t = I_t + C_t \end{cases}$$

[1] No ocurre así en su trabajo de 1933, donde el análisis de estabilidad y monotonía es analizada utilizando la teoría de las ecuaciones mixtas diferenciales-en diferencias. Sin embargo, las condiciones de estabilidad y no-monotonía (que se presentan en el anexo de este trabajo) son de difícil interpretación económica.

[2] Este trabajo de 1954 puede considerarse una extensión de su investigación presentada en 1933 (1935), al incluirse sectores no considerados en éste como el comercio exterior y el sector público. A pesar de ello, la principal diferencia entre ambos, como así también entre éstos y uno posterior (1968), se encuentra en su tratamiento de los determinantes de inversión. Una breve exposición de estos dos modelos se presenta en el anexo.

donde P_t es el nivel de ganancias luego del pago de impuestos, C_t el nivel de consumo de los capitalistas e I_t el nivel de inversión total, todos ellos evaluados en el período t. Todas las variables están expresadas en términos reales.

La primera ecuación dice que el consumo de los capitalistas depende de los beneficios obtenidos λ períodos atrás y que un consumo mínimo A (constante en el corto plazo) está asegurado si los beneficios fueran nulos.[3] La segunda ecuación es simplemente una igualdad, que informa que las ganancias totales de los capitalistas se reparten entre el consumo y la inversión.

Claramente, esta formulación supone que tanto el comercio exterior como el presupuesto gubernamental están en equilibrio y que los trabajadores no ahorran.[4]

Este sistema determinará los niveles de ganancia P_t y de consumo de los capitalistas C_t para una trayectoria de inversión I_t dada.

Del reemplazo de la primera ecuación en la segunda se obtiene la siguiente relación de recurrencia

$$P_t = I_t + qP_{t-\lambda} + A. \qquad (*)$$

Teniendo en cuenta que $P_{t-\lambda} = I_{t-\lambda} + C_{t-\lambda}$, reemplazando sucesivamente tenemos

[3] El rezago en el gasto de consumo está ausente en los trabajos de 1933 y 1968, alegándose una búsqueda de simplicidad, aunque reconociéndose que la inexistencia de este rezago no es un supuesto realista.
[4] Sólo en el trabajo de 1954 que aquí se presenta es considerado de manera explícita el comercio exterior, el sector público y el ahorro de los trabajadores. Sin embargo, de la manera que todos ellos son tratados no implican cambios cualitativos de relevancia en la investigación respecto de lo analizado en 1933 y 1968.

$$
\begin{aligned}
P_t = I_t + qP_{t-\lambda} + A = I_t + qI_{t-\lambda} + q^2 P_{t-2\lambda} + qA + A \\
= I_t + qI_{t-\lambda} + q^2 I_{t-2\lambda} + q^3 P_{t-3\lambda} + q^2 A + qA + A \\
= \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} q^i I_{t-i\lambda} + A\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \sum_{i=0}^{\infty} q^i I_{t-i\lambda} + \frac{A}{1-q},
\end{aligned}
$$

expresión que vincula el nivel de ganancias de un período determinado con los niveles de inversión de todos los períodos anteriores.

A partir de esta fórmula, Kalecki señala que, en definitiva, al ser q menor a la unidad, las ganancias actuales dependen de la inversión actual y las de un pasado cercano. Esto implica que, *aproximadamente*, las ganancias siguen a la inversión después de un período de tiempo promedio ω. Por ello, Kalecki termina afirmando que:

$$P_t = f\left(I_{t-\omega}\right)$$

con $f' > 0$. Su reemplazo en (*) permite obtener la siguiente igualdad:

$$f\left(I_{t-\omega}\right) = I_t + qf\left(I_{t-\omega-\lambda}\right) + A.$$

Para determinar el nivel de ganancias, Kalecki afirma: “Esta ecuación debe ser válida cualquiera que sea la tendencia de la inversión I_t a través del tiempo. Por lo tanto, debe cubrir, entre otros, el caso en que la inversión se mantiene por algún tiempo a un nivel estable, dándonos $I_t = I_{t-\omega} = I_{t-\omega-\lambda}$.” (pg. 56). Esto lo habilita a reescribir la igualdad anterior como

$$f\left(I_t\right) = I_t + qf\left(I_t\right) + A \Rightarrow f\left(I_t\right) = \frac{I_t + A}{1-q},$$

con lo cual rezagando ω períodos se obtiene

$$P_t = \frac{I_{t-\omega} + A}{1-q}.$$ [5]

Incorporación del gobierno y el comercio exterior

Si se permitieran desequilibrios en el comercio exterior y en el presupuesto gubernamental, como así también ahorro por parte de los trabajadores, la distribución del nivel de ganancias de los capitalistas en el período t sería

$$P_t = I_t' - s_t + C_t$$

donde I_t' es la suma de la inversión privada, los excedentes de exportación y el déficit presupuestal, mientras que s_t representa el ahorro de los trabajadores. De esta manera puede obtenerse recursivamente

$$P_t = \sum_{i=0}^{\infty} q^i \left(I_{t-i\lambda}' - s_{t-i\lambda} \right) + \frac{A}{1-q},$$

Expresión que puede aproximarse a

$$P_t = \frac{I_{t-\omega}' - s_{t-\omega} + A}{1-q}.$$ [6]

---

[5] Nótese que se hubiera llegado a igual resultado asumiendo que la inversión de todos los períodos es igual a la realizada en $t-\omega$, es decir $I_{t-i\lambda} = I_{t-\omega}$ para todo i. Esto podría justificarse como una buena aproximación de (*) si se supone que los niveles de inversión en el pasado cercano oscilan en torno a dicho valor, con lo cual los niveles superiores a $I_{t-\omega}$ se compensan con aquellos inferiores a él. Otra alternativa hubiera sido, simplemente, explicitar que se estudiarán relaciones bajo estado estacionario. Cabe remarcar que, tanto en sus trabajos de 1933 como de 1968, la inexistencia de rezago entre la generación de las ganancias y el consumo de la clase capitalista permite obtener la ecuación de determinación del nivel de ganancia de manera directa a partir del sistema inicial, obviamente con $\omega = 0$.

[6] Ya sea asumiendo una relación $P_t = g\left(I_{t-\omega}' - s_{t-\omega}\right)$ con $g' > 0$ o un nivel promedio de $I_{t-\omega}' - s_{t-\omega}$ igual a $I_{t-i\lambda}' - s_{t-i\lambda}$ en el pasado cercano.

Con el objetivo de simplificar aún más esta nueva expresión, Kalecki señala que es válido suponer que $I'_t - s_t$ está altamente correlacionado con I'_t (para ello se basa en información estadística correspondiente a EE.UU. para el período 1929-1941). En consecuencia presenta como válida la siguiente aproximación de la ecuación anterior

$$\boxed{P_t = \frac{I'_{t-\omega} + A'}{1 - q'}}$$

donde el cambio de parámetros de q a q' y de A a A' refleja la sustitución de $I'_{t-\omega} - s_{t-\omega}$ por I'_t. La "superioridad" de esta ecuación respecto de las anteriores reside para Kalecki en que "puede ser demostrada estadísticamente" (pg. 58).[7]

Hemos obtenido así la *ecuación de determinación del nivel de ganancia neta de los capitalistas*.

1.2 Determinación del ingreso bruto del sector privado

En su capítulo 5, Kalecki introduce el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} V_t = \alpha Y_t + B & 0 < \alpha < 1 \quad B > 0 \\ Y_t = V_t + \pi_t & V_t < Y_t \end{cases}$$

Aquí también todas las variables están expresadas en términos reales, siendo V_t la masa salarial, Y_t el ingreso bruto del sector privado y π_t el nivel de ganancias antes del pago de impuestos, todos evaluados en el período t.

La primera ecuación asume que la masa salarial V_t depende positivamente del ingreso bruto del sector privado Y_t asegurándose un nivel mínimo B (constante en

[7] Hubiera sido posible arribar a esta nueva fórmula admitiendo que el consumo de los capitalistas depende de la ganancia pasada *menos* el ahorro de los trabajadores. Matemáticamente consistiría en replantear la primera ecuación del sistema como $C_t = q'\left(P_{t-\lambda} - s_{t-\lambda}\right) + A'$ con $0 < q' < 1$ y $A' > 0$, para así llegar a la expresión más general presentada por Kalecki siguiendo alguno de los procedimientos señalados en la nota anterior.

el corto plazo) y que la primera crece menos que proporcionalmente que el segundo. La segunda ecuación dice que el ingreso bruto del sector privado Y_t se reparte entre salarios V_t y ganancia antes del pago de impuestos π_t.[8]

Este sistema determinará el nivel de ingreso bruto del sector privado Y_t para una trayectoria de ganancias π_t dada.[9]

Del reemplazo de la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$Y_t = \frac{\pi_t + B}{1-\alpha}.$$

Con el objetivo de vincular la ecuación de determinación del ingreso bruto del sector privado con la de determinación de la ganancia, Kalecki supone que el sistema de impuestos está dado y que la relación entre las ganancias reales antes de impuestos (π_t) y netas de impuestos (P_t) puede expresarse mediante una función lineal. De esta manera, la ecuación puede escribirse como

$$\boxed{Y_t = \frac{P_t + B'}{1-\alpha'}}$$

donde las constantes α' y B' "no dependen solamente de los factores que determinan la distribución del ingreso nacional, sino que son influidas también por el efecto del sistema de impuestos sobre las ganancias" (pg. 66).[10]

---

[8] Nótese que la restricción $V_t < Y_t$ exige que el nivel de ganancias sea siempre positivo.

[9] En 1968 se supone directamente que el ratio entre la ganancia y el ingreso bruto nacional se mantiene constante, nuevamente con motivos simplificadores. Por su parte, en 1933, no aparece una explicitación del papel de los salarios en la determinación del nivel de ingreso nacional o del sector privado, con lo cual el vínculo entre ganancias y este último era más directo.

[10] A esta expresión podría haberse llegado de manera más directa postulando inicialmente en el sistema una tercera ecuación $P_t = \eta\pi_t$ con $0 < \eta < 1$. Así, redefiniendo $B' \equiv \eta B$ y $\alpha' \equiv 1-\eta(1-\alpha)$ se obtiene el mismo resultado.

Obtenemos así la *ecuación de determinación del ingreso bruto del sector privado*.

1.3 Determinación de la inversión

El sistema presentado en el capítulo 9 se resume de la siguiente manera:

$$\begin{cases} F_{t+\tau} = D_t & a,b,c,d > 0 \\ D_t = \dfrac{a}{1+c} S_t + b\dfrac{\Delta P_t}{\Delta t} - c\dfrac{\Delta K_t}{\Delta t} + d & \dfrac{a}{1+c} < 1 \\ \dfrac{\Delta K_t}{\Delta t} = F_t - \delta & \\ J_{t+\vartheta} = e\dfrac{\Delta O_t}{\Delta t} & \\ I_t = F_t + J_t & \end{cases}$$

donde todas las variables están expresadas en términos reales siendo D_t el nivel de inversión en capital fijo *decidido*, F_t el nivel de inversión en capital fijo *realizado*, J_t el nivel de inversión en inventarios, K_t el stock de capital fijo, S_t el nivel de ahorro bruto y O_t la producción bruta del sector privado, todos ellos evaluados al momento t. Por su parte, δ es la depreciación (constante) del stock de capital fijo. No se aclara en el capítulo el signo de e pero por contexto se entiende que debe ser positivo.

La primera ecuación dice que las decisiones de inversión en capital fijo D_t demoran τ períodos en materializarse en inversión efectiva $F_{t+\tau}$. La segunda ecuación dice que la decisión de inversión D_t depende positivamente del nivel de ahorro S_t y de la tasa de variación de la ganancia $\Delta P_t/\Delta t$, pero negativamente de la tasa de variación del stock de capital $\Delta K_t/\Delta t$. La tercera ecuación afirma simplemente que la tasa de variación del stock de capital fijo es igual a la inversión menos la depreciación δ. La cuarta ecuación dice que la inversión en inventarios $J_{t+\vartheta}$ depende de la tasa de variación de la producción bruta del sector privado $\Delta O_t/\Delta t$ de ϑ períodos atrás. La quinta y última ecuación es simplemente una igualdad, que informa que la inversión total I_t es igual a la suma de la inversión en capital fijo F_t y la inversión en inventarios J_t.[11]

Este sistema determinará los niveles de inversión total I_t, en capital fijo F_t y existencias J_t para trayectorias dadas de los niveles de ahorro S_t, ganancias P_t y producción bruta del sector privado O_t.

De acuerdo a Kalecki, el supuesto $a/(1+c)<1$ en la primera ecuación "refleja la influencia negativa que un acervo creciente de equipo de capital ejerce sobre las decisiones de invertir" (pg. 106). En otras palabras, Kalecki fundamenta este supuesto en información estadística.

El reemplazo de la primera y tercera ecuación en la segunda arroja que

$$F_{t+\tau} = aS_t + b\frac{\Delta P_t}{\Delta t} - c\left(F_t - \delta\right) + d \ .$$

Sumando miembro a miembro cF_t y dividiendo ambos miembros por $(1+c)$ llegamos a

$$\frac{F_{t+\tau} + cF_t}{1+c} = \frac{a}{1+c}S_t + \frac{b}{1+c}\frac{\Delta P_t}{\Delta t} + \frac{c\delta + d}{1+c} \ .$$

El autor observa que la expresión del lado izquierdo es, en realidad, un promedio ponderado de $F_{t+\tau}$ y F_t, con lo cual lo aproxima por $F_{t+\theta}$ con $\theta < \tau$, siendo θ, a su vez, el mismo rezago que aparece en la ecuación de determinación de la inversión en existencias (igualdad que fundamenta en razones empíricas e información

[11] En el anexo se describen brevemente los modelos de ciclo económico de 1933 y 1968 con especial énfasis en los respectivos tratamientos de los determinantes de la inversión.

estadística).[12] Entonces, teniendo en cuenta esta aproximación y redefiniendo $b' \equiv b/(1+c)$ y $d' \equiv (c\delta + d)/(1+c)$ obtenemos

$$F_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} S_t + b' \frac{\Delta P_t}{\Delta t} + d' \, .$$

Si esta expresión y la cuarta ecuación se reemplazan en la quinta, se obtiene la *ecuación de determinación de la inversión neta*

$$\boxed{I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} S_t + b' \frac{\Delta P_t}{\Delta t} + e \frac{\Delta O_t}{\Delta t} + d'}$$

1.4 El modelo de ciclo económico

Obtenida cada una de las tres expresiones anteriores, junto con la igualdad entre ahorro e inversión, tenemos el modelo de ciclo económico de Kalecki, tal cual es presentado en el capítulo 11:

[12] En ningún momento Kalecki aclara por qué utiliza el mismo tiempo de rezago para ambos comportamientos, aunque seguramente sea para simplificar aún más la presentación de los resultados.

$$
\begin{cases}
P_t = \dfrac{I_{t-\omega} + A}{1-q} & 0 < q < 1 \qquad A > 0 \\
Y_t = \dfrac{P_t + B'}{1-\alpha'} & 0 < \alpha' < 1 \qquad B' > 0 \\
I_{t+\theta} = \dfrac{a}{1+c} S_t + b' \dfrac{\Delta P_t}{\Delta t} + e \dfrac{\Delta O_t}{\Delta t} + d' & a, b', c, d' > 0 \quad \dfrac{a}{1+c} < 1 \\
S_t = I_t & \\
O_t = Y_t + E & E > 0
\end{cases}
$$

Nótese que este sistema está conformado por las ecuaciones de determinación de ganancia neta de los capitalistas P_t, ingreso bruto del sector privado Y_t e inversión I_t, al cual sólo se le agrega una condición de equilibrio de igualación del ahorro bruto S_t con la inversión I_t y la igualdad contable que descompone que la producción bruta del sector privado O_t en ingreso bruto Y_t e impuestos indirectos E. Nuevamente, todas las variables están expresadas en términos reales.

Puede apreciarse a partir de la primera ecuación del sistema que Kalecki ha vuelto al supuesto original de equilibrio comercial y presupuestario y de inexistencia de ahorro por parte de los trabajadores.

A partir de este modelo, Kalecki estudia tanto el problema del crecimiento económico como el de desarrollo. En el primer caso A, B', E y d' son constantes, supuesto que se levantará en el segundo caso.

El problema del crecimiento económico

Del reemplazo de la primera, segunda, cuarta y sexta ecuación en la tercera se obtiene

$$I_{t+\theta}=\frac{a}{1+c}I_t+\frac{1}{1-q}\left(b'+\frac{e}{1-\alpha}\right)\frac{\Delta I_{t-\omega}}{\Delta t}+d'$$

Dado que el sistema debe quedar inmóvil en el caso que la inversión I_t sea igual a la depreciación δ, puede derivarse a partir de la última ecuación que:

$$\delta=\frac{a}{1+c}\delta+d',$$

expresión que surge de reemplazar $I_{t+\theta}$ e I_t por δ y, consecuentemente $\Delta I_{t-\omega}$ por 0. Restando miembro a miembro las últimas dos expresiones y redefiniendo $i_t \equiv I_t-\delta$ arribamos a

$$\boxed{i_{t+\theta}=\frac{a}{1+c}i_t+\mu\frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t}}$$

endonde $\mu\equiv\frac{1}{1-q}\left(b'+\frac{e}{1-\alpha'}\right)$. Esta ecuación tiene por solución la dinámica de la inversión neta la cual, según analiza intuitivamente Kalecki, tiene un comportamiento cíclico.

El problema del desarrollo económico

Este problema es analizado por Kalecki en el capítulo 14. Para ello toma su modelo de crecimiento económico del capítulo 11 permitiendo ahora el cambio temporal de A, B', E y d', es decir, reemplaza dichas constantes por las tendencias A_t, B'_t, E_t y d'_t [13]. Siguiendo igual procedimiento de resolución del sistema y recordando la definición de μ arribamos a

$$I_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} I_t + \mu \frac{\Delta I_{t-\omega}}{\Delta t} + L_t + d'_t \,, \quad (**)$$

dónde $L_t \equiv \mu \frac{\Delta A_t}{\Delta t} + \frac{e}{1-\alpha'} \frac{\Delta B'_t}{\Delta t} + e \frac{\Delta E_t}{\Delta t}$. Sea y_t la tendencia de largo plazo de la inversión neta. Reemplazando este nivel en la ecuación anterior obtenemos

$$y_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} y_t + \mu \frac{\Delta y_{t-\omega}}{\Delta t} + L_t + d'_t \,,$$

la cual restada a (**) y redefiniendo $i_t \equiv I_t - y_t$ se obtiene nuevamente

$$\boxed{i_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} i_t + \mu \frac{\Delta i_{t-\omega}}{\Delta t}}$$

con lo cual la ecuación de movimiento de i_t obtenida para el caso de “crecimiento económico” puede ser interpretada como la componente cíclica de la inversión neta respecto de su tendencia de largo plazo.

Sólo queda determinar esta tendencia de largo plazo y_t para poder concluir el análisis del comportamiento de la inversión neta, la cual claramente se ve afectada a través de L_t y d'_t. Por ello es que resulta necesario estudiar el comportamiento de ambos.

[13] Nótese que el reemplazo de A por A_t no puede ser directo, sino que, nuevamente, surge de una aproximación en el cálculo de la nueva ecuación de determinación del nivel de ganancia de los capitalistas, ya sea definiéndose una relación directa entre P_t y la suma $I_{t-\omega} + A_{t-\omega}$ o algún procedimiento alternativo como los mencionados en la nota 7.

Para el estudio de L_t Kalecki supone que A_t, B_t' y E_t varían en proporción al nivel de largo plazo de la inversión. Es inmediato entonces que

$$L_t = \sigma \frac{\Delta y_{t-\omega}}{\Delta t} \qquad \sigma > 0$$

con lo cual el comportamiento de largo plazo se reescribe como

$$y_{t+\theta} = \frac{a}{1+c} y_t + (\mu + \sigma) \frac{\Delta y_{t-\omega}}{\Delta t} + d_t' \; .$$

A su vez, para el estudio de d_t' Kalecki recuerda que en la posición de equilibrio del sistema estático el nivel a largo plazo de la inversión, y, es estable e igual a la depreciación δ, con lo cual en el equilibrio de largo plazo se sigue que

$y_{t+\theta} = y_t = \delta$ y $\Delta y_{t-\omega} = 0$. Reemplazando en la ecuación de largo plazo de la inversión se obtiene

$$d_t' = (1-n)\delta_t$$

siendo $n_t \equiv a/(1+c)$. Si a su vez se supone que también $\delta_t = \beta K_t$ con $\beta > 0$ siendo K_t el stock de capital del período t y que existen innovaciones que elevan d' por encima del nivel correspondiente a la situación estática, puede considerarse el siguiente “caso general”

$$d_t' = (1-n)\beta K_t + \gamma K_t \,, \qquad \text{con } \gamma > 0$$

en donde γ “mide la intensidad de los ‘factores de desarrollo’” (pg. 152).

Examinadas las dinámicas de L_t y d_t', la tendencia de largo plazo de la inversión resulta

$$\boxed{y_{t+\theta} = n y_t + (\mu + \sigma) \frac{\Delta y_{t-\omega}}{\Delta t} + (1-n)\beta K_t + \gamma K_t}$$

Como esta ecuación en el caso estático ($\delta_t = \beta K_t$ y $\Delta y_{t-\omega} = 0$) implica que la inversión tiende a elevarse ($y_{t+\theta} = \beta K_t + \gamma K_t$), entonces la inversión de largo plazo excede a la depreciación. Por ello, el stock de capital aumenta, con lo cual también se incrementa $(1-n)\beta K_t + \gamma K_t$ impulsando nuevamente la inversión. Al aumentar la inversión, el término $(\mu+\sigma)(\Delta y_{t-\omega}/\Delta t)$ es positivo, lo cual acentúa aún más la tasa de crecimiento de y_t

> A todo ello, Kalecki concluirá afirmando que esto último "refleja el efecto que la tasa de variación de la ganancia tiene [vía b'] sobre la inversión en capital fijo y el que ejerce la tasa de variación de la producción total [vía e] sobre la inversión en existencias". En consecuencia "son los 'factores de desarrollo' tales como la innovación los que impiden que el sistema se quede en una situación estática y engendren una tendencia ascendente a largo plazo. La acumulación de capital, resultante del hecho de que la inversión a largo plazo es superior al nivel de depreciación, amplía a su vez el alcance de

la influencia de los 'factores de desarrollo' y contribuye de esa manera a sostener la tendencia de largo plazo. El aumento de la ganancia y de la producción que se suscita como resultado del movimiento de ascenso de la inversión tiende a provocar una tasa más elevada de crecimiento" (pg. 153).

2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD Y MONOTONÍA DE LA INVERSIÓN

Vimos anteriormente que Kalecki supone que $a/(1+c)$ es menor a la unidad, ya que si se supusiera lo contrario "no habría de hecho ciclo económico alguno, y... el desarrollo a largo plazo del sistema capitalista sería también distinto al proceso que conocemos." (pg. 106). Veremos entonces en qué medida este supuesto resulta relevante a la hora de analizar la trayectoria temporal de la inversión neta.

Para analizar la estabilidad y monotonía de la solución de la ecuación de determinación de la inversión neta, es conveniente reescribirla como la ecuación en diferencias de orden $\theta + \omega$[14]

$$i_{t+\theta} - \frac{a}{1+c} i_t - \mu i_{t+1-\omega} + \mu i_{t-\omega} = 0$$

que tiene por ecuación característica el polinomio de grado $\theta + \omega$

$$r^{\theta+\omega} - \frac{a}{1+c} r^{\omega} - \mu r + \mu = 0 \, .$$

Puede verse que lo que la condición $a/(1+c) < 1$ asegura es que si i_t tiene un comportamiento convergente, lo hace al nivel $i^* = 0$, dado que la ecuación característica no tiene raíces iguales a la unidad. De hecho,

$$1^{\theta+\omega} - \frac{a}{1+c} 1^{\omega} - \mu 1 + \mu = 1 - \frac{a}{1+c} \neq 0 \, .$$

Sin embargo, para poder asegurar la convergencia a $i^* = 0$ es necesario asegurar también que los módulos de las $\theta + \omega$ raíces de la ecuación característica sean menores a la unidad. Las condiciones necesarias y suficientes para esta convergencia son difíciles de obtener dada la generalidad del grado de la ecuación, sin embargo es posible obtener una condición suficiente sobre los valores de un conjunto de parámetros que asegure tal resultado. A tal efecto, teniendo presente que es condición suficiente de estabilidad que la suma de los valores absolutos de todos los coeficientes del polinomio característico sea menor a 2 en sentido estricto (criterio basado en el *teorema de Rouché* sobre las cotas de las raíces de un polinomio), es posible asegurar la estabilidad de la solución si

[14] Otro camino sería hacer $\Delta t \to 0$ y tratar la ecuación de la dinámica de la inversión como una ecuación mixta diferencial-en diferencias, en línea con el trabajo de 1933, pero el análisis de estabilidad de su solución resulta mucho más complicado por el hecho de que aquí $\omega > 0$.

$$S = 1 + \left| -\frac{a}{1+c} \right| + \left| -\mu \right| + \mu < 2 \Rightarrow 2\mu < 1 - \frac{a}{1+c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \equiv \frac{1}{1-q}\left(b' + \frac{e}{1-\alpha'} \right) < \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{1+c} \right)},$$

es decir si se verifica una baja sensibilidad de la tasa de variación del ingreso bruto en la inversión en inventarios (bajo e), alto efecto amortiguador de la inversión realizada en las decisiones de inversión en capital fijo (alto c), reducido impacto del ahorro y de la tasa de ganancia en las decisiones de inversión en capital fijo (bajos a y b'), baja propensión marginal a consumir de los capitalistas (bajo q), reducida participación de la masa salarial en el ingreso bruto (bajo α') y elevada alícuota de impuesto a las ganancias (alto η). Sin embargo, al ser tal condición sólo suficiente, no representa una propiedad excluyente de toda dinámica convergente de la inversión.

Con respecto a la monotonía de la trayectoria de la inversión, el carácter cíclico del sistema requiere asegurar la existencia de raíces complejas o reales negativas de la ecuación característica. Teniendo presente la *Regla de Descartes*[15] la existencia de dos cambios de signos en los coeficientes asegura que la cantidad de raíces reales positivas no pueden ser mayor a dos. Entonces, puede asegurarse inmediatamente que siempre que $\theta + \omega \geq 3$, el polinomio característico tendrá al menos una raíz no-positiva. Como no hay raíces nulas (porque $\mu > 0$ siempre que $e > 0$), las restantes serán negativas o complejas conjugadas.

Por otra parte, en el caso $(\theta, \omega) = (1,1)$, las raíces son

[15] En toda ecuación algebraica, completa o incompleta, el número de raíces positivas no puede exceder la cantidad de cambios de signos de sus coeficientes. A su vez, en toda ecuación algebraica completa, el número de raíces negativas no puede exceder la cantidad de continuaciones en los signos de sus coeficientes (Gandolfo, pg. 54). Aquí nos interesa únicamente el límite a la cantidad de raíces positivas.

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{a}{1+c}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\mu+\frac{a}{1+c}\right)^2-4\mu}$$

Claramente, para $\mu>0$ no puede haber raíces negativas. Es claro también que no hay raíces nulas, pero en principio, podría haber raíces complejas. Para que ello ocurra se requiere que

$$\left(\mu+\frac{a}{1+c}\right)^2<4\mu \quad \text{o bien} \quad \mu^2+2\left(\frac{a}{1+c}-2\right)\mu+\left(\frac{a}{1+c}\right)^2<0\,,$$

lo cual puede darse o no.[16] De esta manera, la posibilidad de un comportamiento cíclico de la inversión no puede darse a menos que los rezagos de la ganancia respecto de la inversión y de la inversión en inventarios respecto del producto bruto del sector privado sean al menos uno de ellos superior a 1.

3. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos hecho una exposición del modelo macrodinámico de Kalecki de 1954, con especial énfasis en la estabilidad y monotonía de la inversión, que en el trabajo original se había relegado a explicaciones intuitivas.

Así, hemos visto que la exigencia de que $a/(1+c)$ sea menor a la unidad no es suficiente para garantizar la estabilidad de la inversión, aunque es un supuesto relevante para garantizarla.

Por otra parte, en lo que respecta a la monotonía, es decir la generación de ciclos de inversión, se observa que la inversión puede presentar ciclos o no. Su existencia dependerá de la combinación de una variedad de parámetros que definen la dinámica del sistema, entre ellos los rezagos existentes entre la generación de

[16] Por ejemplo, para $a/(1+c)=0{,}9$, la desigualdad se verifica para $\mu=1$, pero no se cumple sí $\mu=0{,}1$.

ganancias y el crecimiento de la producción bruta del sector privado en la efectivización de la inversión.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gandolfo, G. (1997). *Economic Dynamics*. Springer Verlag. New York.

Kalecki, M. (1935). A Macrodynamic Theory of Business Cycles. *Econometrica*, Vol. 3, No. 3 (Jul., 1935), pp. 327-344.

Kalecki, M. (1954). *Teoría de la dinámica económica. Ensayo sobre los movimientos cíclicos y a largo plazo de la economía capitalista*. Fondo de Cultura Económica. México, 1995 (reimpresión).

Kalecki, M. (1968): Trend and Bussiness Cycles Reconsidered. *The Economic Journal*, Vol. 78, No. 310 (Jun, 1968) pp. 263-276.

ANEXO

Dinámica de la inversión en los otros dos modelos de Kalecki

El modelo de 1933

Aquí el consumo de los capitalistas C_t es contemporáneo a la determinación de las ganancias P_t. Estas ganancias son distribuidas por los capitalistas entre su consumo y lo que Kalecki llama "acumulación bruta" H_t, que Kalecki supondrá igual a la producción de bienes de capital. Así tenemos la siguiente ecuación de determinación de las ganancias:

$$P_t = \frac{A + H_t}{1 - q}$$

La producción de bienes de capital H_t en un período de tiempo determinado dependerá del "tiempo promedio de producción" de los mismos, que Kalecki representará por un valor promedio θ a fin de simplificar la exposición. Así la producción de bienes de capital totalmente terminados al momento t será igual a

$$H_t = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^{t} I_\tau \, d\tau \ .$$

Por su parte, en lo que respecta a los determinantes de la inversión, Kalecki asume que la tasa de inversión I_t / K_t depende positivamente de la tasa de ganancia P_t / K_t y negativamente de la tasa de interés. Sin embargo, luego supone constante la tasa de interés y aproxima linealmente la relación entre las tasas de inversión y de ganancia. Así tenemos:

$$\frac{I_t}{K_t} = \beta \frac{P_t}{K_t} - n = \frac{\beta}{1-q} \frac{A + H_t}{K_t} - n \Rightarrow I_t = p\left(A + H_t\right) - nK_t \Rightarrow I'_t = pH'_t - nK'_t$$

donde $p \equiv \beta / (1-q)$, con $\beta > 0$ y $0 < q < 1$. Cabe aclarar que I_t representa las *órdenes* de inversión, mientras que la *producción* de bienes de capital vendrá dada por H_t.

La variación del stock de capital será igual a la diferencia entre la cantidad de equipos de producción terminados F_t y la demanda por restauración del stock de

capital preexistente U, es decir $K_t' = F_t - U$. Pero como desde la decisión de inversión y la obtención del nuevo equipo de capital existe un rezago θ determinado por el tiempo promedio de producción, entonces tendremos que $K_t' = I_{t-\theta} - U$. Teniendo en cuenta esta última expresión y sabiendo que

$$H_t = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} I_\tau d\tau \Rightarrow H_t' = \frac{I_t - I_{t-\theta}}{\theta},$$

se sigue entonces que

$$I_t' = p\frac{I_t - I_{t-\theta}}{\theta} - n\left(I_{t-\theta} - U\right).$$

Definiendo la inversión neta J_t como $J_t \equiv I_t - U$ arribamos a la ecuación de la dinámica de la inversión neta

$$\boxed{\left(p + \theta n\right) J_{t-\theta} = pJ_t - \theta J_t'}.$$

Los análisis de Kalecki (1935) y Gandolfo (1997) concluyen que las variaciones cíclicas ocurren cuando $p + \theta n > e^{p-1}$. En lo que concierne a la estabilidad de la inversión neta, a partir del *teorema de Burger* (Gandolfo, pg 563) puede demostrarse que es condición necesaria y suficiente que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\arccos\left(\frac{p}{p+\theta n}\right) > \sqrt{\theta^2 n^2 + 2p\theta n},$$

la cual puede verificarse o no.

El modelo de 1968

El consumo de los capitalistas C_t nuevamente es contemporáneo a la determinación de las ganancias P_t, suponiéndose además que la relación entre las ganancias y el ingreso bruto nacional Y_t^N permanecen constantes a lo largo del tiempo. Entonces tenemos las siguientes dos ecuaciones de determinación de las ganancias y del ingreso bruto nacional:

$$P_t = m\left(I_t + A\right) \qquad\qquad Y_t^N = \frac{P_t}{\gamma}$$

donde $m \equiv 1/(1-q)$ y $0 < \gamma, q < 1$. En lo que respecta a la inversión, Kalecki supone que la principal motivación es la búsqueda de una "tasa de ganancia estándar" $\bar{\pi}$, la cual se encuentra determinada por la ganancia que arroja el nuevo equipo de inversión. Así, por un lado, el capitalista comparará cómo se comporta la ganancia obtenida con el equipo de capital con el cual está operando hasta ese entonces en relación a dicha tasa estándar: si la tasa obtenida con el equipo preexistente es inferior a ella, el capitalista estará motivado a realizar más inversión; caso contrario estará motivado a reducirla. Así, el primer determinante de la inversión vendrá determinado por:

$$I_t^1\left(\bar{\pi}\right) = n\frac{\Delta P_t}{\bar{\pi}},$$

donde $0 < n < 1$.

La modelización de la inversión como consecuencia del progreso técnico requiere un tratamiento un poco más delicado. Dado que el costo laboral en términos reales en el cual el capitalista incurre con el viejo stock de capital es igual a $Y_t^N - P_t$, esta diferencia también representa aproximadamente los costos laborales asociados al viejo equipamiento (ya que el equipamiento nuevo representará una proporción muy baja sobre el capital total en el año corriente). Una mayor productividad derivada del progreso técnico provocará un aumento de la diferencia $Y_t^N - P_t$, lo cual implicará una reducción de la ganancia obtenida con el equipamiento viejo. Esta reducción en los beneficios derivados del viejo equipo no será plena, sino que se dará en una proporción ν, donde ν "será mayor mientras más grande sea la tasa de incremento en la productividad resultante del progreso técnico" (pg. 267). Sin embargo, dado P_t, la reducción de $\nu\left(Y_t^N - P_t\right)$ es la contracara de la ganancia en los beneficios capturados por la nueva planta. Así, el capitalista, comparará esta ganancia $\nu\left(Y_t^N - P_t\right)$ con la tasa de ganancia estándar $\overline{\pi}$. Si la primera no supera (supera) a la segunda, el capitalista aumentará (disminuirá) la inversión en nuevo equipo.

En fórmulas:

$$I_t^2\left(\overline{\pi}\right) = \nu\frac{Y_t^N - P_t}{\overline{\pi}} = \frac{\nu}{\overline{\pi}}\left(\frac{P_t}{\gamma} - P_t\right) = P_t\frac{\nu}{\overline{\pi}}\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = \frac{\varsigma}{\overline{\pi}}P_t$$

donde $\varsigma \equiv \nu\left(1/\gamma - 1\right)$, habiéndose utilizado también el hecho de que $Y_t = P_t/\gamma$. Entonces la inversión total necesaria para captar la tasa de ganancia estándar $\overline{\pi}$, que denotaremos por $I\left(\overline{\pi}\right)$, es igual a

$$I_t\left(\overline{\pi}\right) = I_t^1\left(\overline{\pi}\right) + I_t^2\left(\overline{\pi}\right) = \frac{n\Delta P_t + \varsigma P_t}{\overline{\pi}}.$$

De esta manera, el capitalista comparará su nivel actual de inversión I_t contra esta "inversión deseada" $I_t\left(\overline{\pi}\right)$. Si la primera supera (no supera) a la segunda, su decisión de inversión D_t será de reducirla (incrementarla). Si además se supone que la decisión de inversión también depende positivamente del ahorro de los rentistas E_t, que es una proporción e del ahorro de los empresarios S_t, y de que también aquí existe un rezago τ entre las decisiones de inversión D_t y su realización I_t, tenemos que

$$I_{t+\tau} = D_t = S_t + r\left(I\left(\overline{\pi}\right) - I_t\right) = eI_t + r\left(\frac{n\Delta P_t + \varsigma P_t}{\overline{\pi}} - I_t\right)$$

donde $0 < r < 1$, habiéndose utilizado la igualdad ahorro-inversión $S_t = I_t$. Así, recordando que $P_t = m(I_t + A)$, arribamos a la ecuación de la dinámica de inversión

$$\boxed{I_{t+\tau} = aI_t + b\Delta I_t + Z}$$

donde $a \equiv e - r(1 - \varsigma m/\overline{\pi})$, $b \equiv rmn/\overline{\pi}$ y $Z \equiv Ar\varsigma m/\overline{\pi}$, ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden $\tau + 1$, cuyo análisis de estabilidad y monotonía de su solución puede realizarse mediante un procedimiento similar al aquí utilizado sobre el modelo de 1954.

Kalecki supone que es razonable asumir que $a < 1$ (Kalecki 1968, pg. 270). Sin embargo, si se supone que A representa “cierta magnitud que cambia lentamente dependiente de las condiciones económicas pasadas y desarrollos sociales”, como Kalecki hace en su artículo, el término constante Z pasará a ser una función del tiempo y representará un comportamiento tendencial de la inversión.