APLICACIÓN DE CONTROL ÓPTIMO EN UN MODELO ECONÓMICO DE EXPLOTACIÓN PESQUERA[1, 2]

MARÍA TERESA CASPARRI, VERÓNICA GARCÍA FRONTI y ANA SILVIA VILKER

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Facultad de Ciencias Económicas, UBA
Av. Córdoba 2122, C1120AAQ – Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina

casparri@econ.uba.ar vgarciafronti@economicas.uba.ar anavilker@economicas.uba.ar

Recibido 13 de octubre de 2015, aceptado 30 de noviembre de 2015

Resumen

El objetivo de este trabajo es introducir a los alumnos de la Licenciatura en Economía y Actuario en la teoría de control óptimo en tiempo continuo. Para ello se utilizará un modelo económico simplificado en donde se desea maximizar intertemporalmente la utilidad del consumo de un recurso natural renovable.

La teoría de control óptimo permite estudiar procesos económicos en un horizonte temporal finito o infinito y determinar la trayectoria temporal de la variable de control que optimiza la función objetivo. Una vez hallada la trayectoria óptima de la variable de control es posible encontrar la trayectoria óptima de la variable de estado.

Así por ejemplo frente a la extracción de un recurso renovable, como lo es la pesca de una determinada especie, si se quiere conocer cuál es la trayectoria temporal de la variable de control (que en este caso es el consumo del recurso pesquero) y de la variable de estado (stock del recurso pesquero) que optimizan la utilidad de consumo del bien se está frente a un problema de control óptimo.

Palabras Clave: control óptimo, recurso renovable

---

[1] Este trabajo fue presentado en las XXX Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y afines realizadas en Concordia, Entre Ríos.

[2] Este trabajo fue realizado en el marco de los proyectos de investigación: Proyecto UBACyT 2014-2017: "Gobernanza Macroprudencial Sostenible: financiamiento de la innovación, del agro y sus impactos socioeconómicos. El caso de las PYMES y los pequeños productores agropecuarios en Argentina. y PICT 2011-0919 Gobernanza Financiera: Las propuestas de regulación y sus impactos socioeconómicos. El caso de Argentina. Dirigidos por la Dra. María Teresa Casparri.

APPLICATION OF OPTIMUM CONTROL IN AN ECONOMIC MODEL OF EXPLOITATION FISHERY

MARÍA TERESA CASPARRI, VERÓNICA GARCÍA FRONTI y ANA SILVIA VILKER

Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA), Facultad de Ciencias Económicas, UBA
Av. Córdoba 2122, C1120AAQ – Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina

casparri@econ.uba.ar vgarciafronti@economicas.uba.ar
anavilker@economicas.uba.ar

Abstract

The aim in this work is to introduce students in Economics and Actuary in the optimal control theory in continuous time. To that end it will be used a simplified economic model in which it is look for intertemporal maximization of consumption utility of a renewable natural resource.

Optimal control theory allows to study economic processes to a finit or infinit temporal horizont and determine the temporal trajectory of de control variable that optimizes the objective function. Once it is obtained the optimal control variable trajectory, it is possible to find the optimal state variable trajectory.

For example, in the case of renewable resource extracting, like fishing, if it is wanted to know which is the temporary control variable trajectory (in our example, fishery resource consumption) and the state variable trajectory (fishery resource stock) that optimize the consumption utility of the resource, it is being solved an optimal control problem.

Keywords: optimal control, renewable resource.

1. INTRODUCCIÓN

La optimización dinámica es posible abordarla a través de la teoría de control óptimo. La misma permite estudiar procesos económicos en un horizonte temporal finito o infinito y determinar la trayectoria temporal de la variable de control que optimiza la función objetivo. Una vez hallada la trayectoria óptima de la variable de control es posible encontrar la trayectoria óptima de la variable de estado.

En este trabajo se introducen los conceptos básicos de la teoría de control óptimo en tiempo continuo y luego se la aplica en un modelo económico de explotación de un recurso renovable, como lo es el recurso pesquero, con un horizonte de planificación infinito. El análisis de las trayectorias óptimas se realiza mediante un diagrama de fase, ya que las funciones del modelo son dadas en su forma general.

2. TEORÍA DE CONTROL ÓPTIMO EN TIEMPO CONTINUO

En los problemas de optimización dinámica el objetivo es encontrar el mejor curso de acción para un período de planificación determinado, ya sea horizonte temporal finito o infinito. Una forma de abordar los problemas de optimización dinámica es mediante la teoría de control óptimo, esta teoría se focaliza en la variable de control que sirve de instrumento para la optimización, ya que en este tipo de problemas el decisor o planificador se supone que puede decidir sobre esta variable. El objetivo es seleccionar una trayectoria admisible de la variable de control óptima, a la que llamaremos $u^*(t)$, que tiene asociada una trayectoria admisible óptima de la variable de estado, $x^*(t)$, ambas funciones optimizan al funcional objetivo en un intervalo de tiempo dado.

Como se ha mencionado, la variable de control es aquella sobre la que el decisor puede influir y que determina a la variable de estado.

El problema básico de control óptimo se plantea matemáticamente de la siguiente forma, considerando una única variable de control y de estado:

$$Maximizar \qquad V = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, u)dt$$

$$Sujeto\ a: \qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$$

$$con \quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = libre \quad (considerando\ que\ \ t_0, t_1, x_0\ son\ \ datos)$$

$$u(t) \in \Omega\ \ para\ todo\ t \in [t_0, t_1]$$

En donde:

$x = x(t)$ se denomina variable de estado con $t \epsilon [t_0, t_1]$, es una función continua y con derivada continua por tramos.

$u = u(t)$ se denomina variable de control con $t \epsilon [t_0, t_1]$, es una función continua por tramos.

$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u)$ se denomina ecuación de estado, es una ecuación diferencial que describe el comportamiento de la variable de estado. ($D \subset\ R^3$, $f: D \to R$, $f\ \in\ C^1(D)$

La función F del funcional objetivo es continua con derivadas continuas.

Antes de enunciar las condiciones necesarias de primer orden, conocidas como el principio del máximo de Pontryagin se debe definir el Hamiltoniano asociado al problema como:

$$H(t, x, u, \lambda) \equiv F(t, x, u) + \lambda f(t, x, u)$$

Donde $\lambda = \lambda(t)$ con $t \epsilon [t_0, t_1]$ se denomina variable de coestado.

Para el problema planteado las condiciones necesarias para máximo establecidas por el principio del máximo de Pontryagin son:

$$\begin{cases} 1)\ H(t,x,u^*,\lambda) \geq H(t,x,u,\lambda) \qquad \forall\, t \in\ [t_0,t_1] \\ 2)\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda} = \dfrac{dx}{dt} \\ 3)\ \dfrac{\partial H}{\partial x} = -\dfrac{d\lambda}{dt} \\ 4)\ condición\ de\ transversalidad\text{: } \lambda(t_1) = 0 \end{cases}$$

La primera condición establece que el hamiltoniano debe ser maximizado con respecto a la variable de control. La segunda y tercera ecuación son ecuaciones diferenciales que establecen el movimiento de la variable de estado y de la variable de coestado. La cuarta condición se refiere a la condición de transversalidad que dependerá de las condiciones finales dadas, en esta caso se planteó como condición final del problema de optimización que la variable de estado puedo tomar cualquier valor, para estos casos la condición de transversalidad establece que la variable de coestado en el tiempo final debe anularse.

Estas ecuaciones permiten establecer las trayectorias óptimas de las variables de control, estado y coestado que maximizan a la función objetivo en un período determinado. Debe destacarse que estas condiciones son necesarias, por lo que más adelante se presentarán las condiciones suficientes que aseguran que las trayectorias encontradas maximizan al funcional objetivo.

En las aplicaciones económicas de la teoría de control óptimo en el integrando se presenta el factor de descuento, e^{-rt}. Este indica el grado de impaciencia que tiene el consumidor, cuanto más grande es r mayor importancia tendrá la utilidad presente del consumo comparada con la futura.

El problema de control óptimo con factor de descuento y autónomo es de la siguiente forma:

$$Maximizar\ V = \int_{t_0}^{t_1} G(x,u)e^{-rt}dt$$

$$Sujeto\ a: \quad \frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad ; \qquad x(t_1) = libre$$

Se puede simplificar el planteo de las condiciones de primer orden empleando el hamiltoniano a valor presente: $H_{VP} = He^{rt}$
Por lo tanto, reescribiendo el hamiltoniano:

$$H_{VP} = F(x,u) + \lambda e^{rt} f(x,u)$$

Si se llama $\mu = \lambda e^{rt}$ $(variable\ de\ coestado\ a\ valor\ presente)$

$$H_{VP} = F(x,u) + \mu f(x,u)$$

Ahora las condiciones necesarias de primer orden para el hamiltoniano a valor presente son:

$$\begin{cases} 1)\ H_{VP}(x,u^*,\lambda) \geq H_{VP}(x,u,\lambda) \qquad \forall\ t \in\ [t_0,t_1] \\ 2)\ \dfrac{\partial H_{VP}}{\partial \mu} = \dfrac{dx}{dt} \\ 3)\ -\dfrac{\partial H_{VP}}{\partial x} + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \\ 4)\ condición\ de\ transversalidad: \mu(t_1) = 0 \end{cases}$$

En muchos problemas económicos el horizonte de planificación es infinito, en estos casos la integral que se debe maximizar es una integral impropia, de la que se debe asegurar su convergencia. Matemáticamente el problema planteado, que nuevamente se eligió autónomo:

$$Maximizar\ V = \int_{t_0}^{\infty} G(x,u)e^{-rt}dt$$

$$Sujeto\ a: \quad \frac{dx}{dt} = f(x,u)$$

$$x(t_0) = x_0$$

El hamiltoniano a valor presente asociado en este caso es:

$$H_{VP} = G(x,u) + \mu f(x,u)$$

Las condiciones necesarias de primer orden son:

$$\begin{cases} 1)\ H_{VP}(x,u^*,\lambda) \geq H_{VP}(x,u,\lambda) \\ 2)\ \dfrac{\partial H_{VP}}{\partial \mu} = \dfrac{dx}{dt} \\ 3)\ -\dfrac{\partial H_{VP}}{\partial x} + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \\ 4)\ condición\ de\ transversalidad\text{:}\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-rt}\,\mu = 0 \end{cases}$$

El objetivo sigue siendo encontrar las trayectorias a lo largo del tiempo óptimas de la variables de control, estado y coestado $(u^*(t), x^*(t), \lambda^*(t)\ o\ \mu^*(t))$ que maximizan la función objetivo a lo largo del período de planificación. A lo largo del trabajo solo se han planteado las condiciones necesarias, por lo que ahora se mencionarán las condiciones suficientes (que son válidas para los tres casos de control óptimo estudiados)

$$\begin{cases} F\ cóncava\ en\ (x,u) \\ f\ cóncava\ en\ (x,u) \\ \lambda > 0\ (\mu > 0)\ \ si\ f\ es\ no\ lineal \end{cases}$$

Si se cumplen las condiciones suficientes se puede asegurar que $u^*(t), x^*(t), \lambda^*(t)\ o\ \mu^*(t)$ maximizan a la función objetivo.

Utilizando los conceptos de control óptimo desarrollados se presentará a continuación el problema de optimización de la utilidad del consumo de un recurso pesquero para un período infinito de planeación que se resuelve empleando el principio del máximo de Pontryagin. El modelo económico de optimización dinámica utilizado se basa en el presentado en el libro de Silberberg (The Structure of Economics. A Mathematical Analysis).

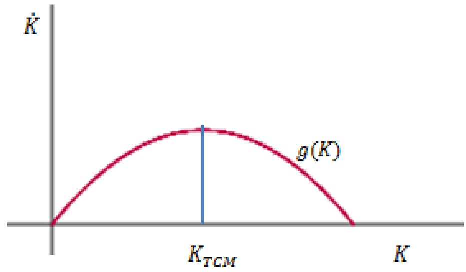
3. MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD DEL CONSUMO DE UN RECURSO PESQUERO

En este modelo se supone que un planificador desea controlar el consumo de un recurso natural para maximizar el funcional bienestar.

$$\text{Maximizar } V = \int_0^\infty U(C)e^{-rt}dt$$

Se asume que la función utilidad $U\big(C(t)\big)$, donde $C(t)$ es una función corriente de consumo, que $U'(\mathrm{C}) > 0$ y $U''(\mathrm{C}) < 0$. Se considera también que el consumidor es impaciente, es decir que tiene una tasa de preferencia intertemporal, r, que es positiva y constante. Se supone que el crecimiento del recurso depende exclusivamente del stock del mismo y que tiene una curva de crecimiento biológico $\dot{K} = \frac{dK}{dt} = g(K)$ como la que se expone en el Gráfico 1. Como se puede visualizar en el gráfico $g'(K) > 0$ cuando $K < K_{TCM}$ $g'(K_{TCM}) = 0$ y $g'(K) < 0$ cuando $K > K_{TCM}$. La función $g(K)$ es cóncava, es decir $g''(K) < 0$.

Gráfico 1. Función del crecimiento biológico del recurso pesquero



Fuente. Elaboración propia.

El modelo de maximización de la utilidad del consumo puede ser representado matemáticamente de la siguiente manera:

$$\text{Maximizar} \quad V = \int_0^{\infty} U(C)e^{-rt}dt$$

$$\text{Sujeto a:} \quad \frac{dK}{dt} = g(K) - C$$

$$condición\ inicial: \quad K(0) = K_0$$

Dónde:

$g(K)$: Función de crecimiento biológico del recurso

K: Stock de capital

r: tasa de impaciencia intertemporal del consumidor

Se asume que la integral impropia converge

La variable de estado es el stock de capital (K), que representa el stock del recurso renovable y la variable de control es el consumo $C(t)$. La ecuación de movimiento dada indica que el cambio en el stock del capital es igual a la diferencia entre la tasa de crecimiento $g(K)$ del recurso pesquero y el consumo del mismo.

Para resolver el problema se construye el Hamiltoniano a valor presente:

$$H_{VP} = U(C) + \mu[g(K) - C]$$

Las condiciones necesarias de primer orden para este problema son:

$$\begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial H_{VP}}{\partial C} = 0 \rightarrow \quad U'(C) - \mu = 0 \\ \quad \dfrac{\partial^2 H_{VP}}{\partial C^2} < 0 \rightarrow\ U''(C) < 0 \\ 2)\ \dfrac{\partial H}{\partial \mu} = \dfrac{dK}{dt} \quad \rightarrow \quad g(k) - C = \dfrac{dK}{dt} \\ 3)\ -\dfrac{\partial H}{\partial K} + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \rightarrow\ -\mu g'(K) + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \\ 4)\ Condición\ de\ transversalidad \quad \lim_{t\to+\infty} e^{-rt}\mu = 0 \end{cases}$$

Si el hamiltoniano es diferenciable con respecto a la variable de control, la primera condición necesaria es que: $\frac{\partial H_{VP}}{\partial C} = 0$ y $\frac{\partial^2 H_{VP}}{\partial C^2} < 0$. Por los supuestos del modelo se asegura que la derivada segunda es negativa. Que se anule la primera derivada parcial del hamiltoniano a valor presente con respecto a la variable de control determina la ecuación:

$$U'(C) - \mu = 0$$

Las 2º y 3º condiciones necesarias permiten obtener un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} g(k) - C = \dfrac{dK}{dt} \\ -\mu g'(K) + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \end{cases}$$

Las ecuaciones obtenidas de las condiciones necesarias están compuestas por funciones generales por lo que no es posible encontrar una solución cuantitativa del problema pero como es autónomo se puede realizar un diagrama de fase y efectuar el análisis correspondiente.

La primera condición del máximo establece $\mu = U'(C)$, como U´´(C) < 0 esta es una función monótona y usando una versión global del teorema de la función implícita $C = c(\mu)$, por lo tanto se pueden reescribir a las dos ecuaciones diferenciales de la siguiente forma:

$$\begin{cases} g(k) - c(\mu) = \dfrac{dK}{dt} \\ -\mu g'(K) + r\mu = \dfrac{d\mu}{dt} \end{cases}$$

Ahora se presenta un sistema de ecuaciones diferenciales en el que sólo se presentan K y μ. Las dos curvas de demarcación del sistema, es decir ($\frac{dK}{dt} = 0$; $\frac{d\mu}{dt} = 0$) son:

$$\begin{cases} Curva\ de\ demarcación\ \dfrac{dK}{dt} = 0 \\ g(K) - c(\mu) = 0 \\ \\ Curva\ de\ demarcación\ \dfrac{d\mu}{dt} = 0 \\ -\mu g'(K) + r\mu = 0 \end{cases}$$

Para graficar la curva de demarcación $\frac{dK}{dt} = 0$ se debe tener en cuenta: que: $\mu = U'(c)$. Debido al supuesto de que $U''(C) < 0$, la función es monótona, por lo que puede ser invertida, y usando el teorema de la función implícita se puede decir que $C=c(\mu)$ y se cumple que: $c'(\mu) = \frac{1}{U''(C)}$ por lo tanto la función $c(\mu)$ es decreciente, es decir cuando μ aumenta C disminuye y viceversa.

Por supuestos que se han expuesto anteriormente $g'(K) > 0$ cuando $K < K_{TCM}$ y $g'(K) < 0$ cuando $K > K_{TCM}$ por lo cual para mantener la igualdad $c(\mu)$ debe crecer antes del K_{TCM} y disiminuir después del mismo. Por lo tanto, μ debe disminuir antes del K_{TCM} e incrementarse después del K_{TCM} como se puede visualizar en el Gráfico 2.

Mientras que para graficar la otra curva de demarcación $\frac{d\mu}{dt} = 0$ se analiza lo siguiente:

La curva de crecimiento biológico debe ser igual la tasa de impaciencia $g'(k) = r$ y esta se supone positiva por lo tanto debe estar a la izquierda del K_{TCM} donde $g'(K)>0$. De esto se deduce que la curva $\frac{d\mu}{dt} = 0$ es una línea vertical que corta al eje de abscisas en el valor de la tasa de impaciencia r, y está a la izquierda de K_{TCM}.

En el cruce de las dos curvas se presenta el punto de equilibrio estacionario de la variable de estado y de coestado (ver el Gráfico 2) falta determinar qué les sucede a estas variables en cada una de las cuatro zonas que quedaron determinadas en el plano de fase: I, II, III y IV.

Si se analiza sólo el movimiento de m a la izquierda del capital máximo (K_{TCM}) $\frac{d\mu}{dt} < 0$ pues g´(K) es mayor que cero, es decir, en las zonas I y IV: $\frac{d\mu}{dt} < 0$. Mientras que a la derecha del capital máximo (K_{TCM}) $\frac{d\mu}{dt} > 0$ pues g´(K) es menor que cero, es decir en las zonas II y III: $\frac{d\mu}{dt} > 0$.

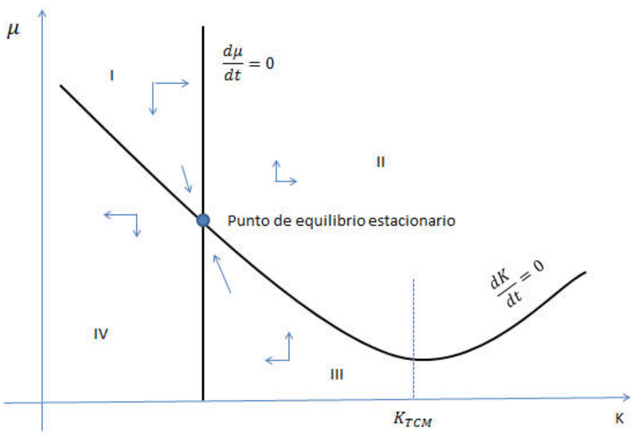
En los sectores I y II, es decir sobre la curva de demarcación $\frac{dK}{dt} = 0$ como $c(\mu)$ es una función decreciente $\frac{dK}{dt} > 0$ y en III y IV como $c(\mu)$ es una función creciente $\frac{dK}{dt} < 0$.[2]

De esta forma se puede construir para cada sector la configuración correspondiente. En este caso se observa que existe un punto de ensilladura. Simplificadamente, los puntos ubicados en los sectores II y IV se alejan del punto de equilibrio, mientras que en los sectores I y III existe una rama estable. Como el punto de equilibrio es un punto de ensilladura se sabe que la ecuación característica que determina la solución del problema de control contiene una raíz positiva y otra negativa.

[2] En el trabajo Análisis de la dinámica de la explotación pesquera –recurso renovable- utilizando diagrama de fase de nuestra autoría, profundizamos en la confección de diagramas de fase cuando la función se plantea en forma general presentado en las XXIX Jornadas Nacionales de Docentes de Matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines

Falta verificar bajo qué condiciones se cumple la condición de transversalidad: $\lim_{t \to +\infty} e^{-rt}\mu = 0$, debido a que la solución presenta un punto de ensilladura, la única forma de que la misma se verifique es que la trayectoria óptima sea la que se dirige al punto de equilibrio.

Gráfico 2. Diagrama de fase



Fuente: Elaboración propia.

Para asegurar que las trayectorias óptimas encontradas maximizan al funcional objetivo se deben verificar las siguientes condiciones suficientes:

$$\begin{cases} 1)\ U(C)e^{-rt}\, es\ cóncava\ en\ (K,C) \\ 2)\ g(K) - C\ es\ cóncava\ en\ (K,C) \\ 3)\ \mu > 0 \end{cases}$$

Las dos primeras condiciones se cumplen por los supuestos del modelo y la tercera se verifica, ya que de la primera condición del máximo $\mu = U'(C)$ y por supuesto del modelo $U'(C) > 0$.

En síntesis, el diagrama de fase permite conocer la dinámica de las variable de estado (y por lo tanto también de la variable de control) y de la variable de coestado. Por otro lado, la condición de transversalidad permite afirmar que la trayectoria óptima es la rama estable, es decir la que conduce al equilibrio estacionario. En base a las consideraciones hechas se observa que en el equilibrio el stock del recurso es menor que el K_{TCM} así como el consumo, es decir la optimización dinámica posee un óptimo que es distinto del que se hubiera obtenido con la optimización clásica.

4. CONCLUSIONES

La teoría de control óptimo es una herramienta muy utilizada en los modelos económicos para realizar una optimización dinámica en donde la solución óptima es una trayectoria en el tiempo de las variables de control, estado (relacionada con la variable de control mediante la ecuación de movimiento) y la de coestado.

En el problema económico planteado se maximizó dinámicamente mediante la teoría de control óptimo la utilidad del consumo de un recurso renovable en un horizonte de planificación infinita. El problema presenta a las funciones en su forma general por lo que no se puede encontrar explícitamente la trayectoria óptima de cada una de las variables, pero debido a que el problema es autónomo fue posible realizar un diagrama de fase y determinar la trayectoria óptima.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balbas de la Corte, A., Gil Fana, J. A. y Gutiérrez Valdeón S. (1991). *Análisis matemático para la Economía I. Calculo diferencial.* Madrid, España. Editorial AC.

Casparri, M.T; García Fronti, V. y Vilker, A. (2014) Análisis de la dinámica de la explotación pesquera – recurso renovable – utilizando diagrama de fase. Ponencia en la XXIX Jornadas Nacionales de docentes de matemática de Facultades de Ciencias Económicas y Afines en Santa Rosa, La Pampa.

Chiang, A. y Wainwright, K. (2006). *Métodos fundamentales de economía matemática*. 4º ed. México. Mc Graw-Hill.

Chiang, A. (2000). *Elements of Dynamic optimization*. Mc Graw-Hill

Jarne Jarne, G., Minguillón Constante E. y Pérez-Grasa I. (1997). *Matemática para la economía. Algebra Lineal y Cálculo Diferencial.* Madrid, España. Mc Graw-Hill.

Shone, R (2002). *Economic Dynamic Phase Diagrams and their Economic Application.* Cambridge 2º ed. UK.Cambridge.

Silberberg, E. (1990). *The Structure of Economics. A Mathematical Analysis.* Singapore. Mc Graw-Hill.