CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
www.latindex.org

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

SOBRE LAS PROPIEDADES DEL EQUILIBRIO GENERAL CON *DEFAULT* EN ECONOMÍAS CON MERCADOS INCOMPLETOS Y HORIZONTE INFINITO

Eduardo A. Rodríguez

Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.

edalro@hotmail.com

Resumen

Recibido: 03/2016

Aceptado: 11/2016

Palabras clave

Equilibrio general.

Mercados incompletos.

Default

Este trabajo presenta un análisis de las propiedades del equilibrio general con *default* en economías con mercados incompletos y horizonte infinito.

Se observa que en equilibrio un agente realiza dos tipos de comparaciones al decidir su participación en el mercado de crédito: como prestamista y como prestatario. Esta propiedad del equilibrio permite vincular grados de penalidad, percepción de incumplimiento y rendimientos prometidos.

Se presenta además un análisis del equilibrio para el caso de economías con dos tipos homogéneos de agentes, lo que permite inferir que en equilibrio bajo default parcial las valoraciones personales del incumplimiento son iguales entre comprador y vendedor del activo incumplido.

ISSN (En línea) 2362 3225

ON THE PROPERTIES OF GENERAL EQUILIBRIUM WITH DEFAULT IN ECONOMIES WITH INCOMPLETE MARKETS AND INFINITE HORIZON

Abstract

In this paper we study the properties of general equilibrium with default in economies with incomplete markets and infinite horizon.

It is noted that, in equilibrium, an agent makes two types of comparisons when deciding whether to participate in the credit market: as a lender and as a borrower. As a consequence, the equilibrium can be linked to levels of punishment, perception of default and promised returns.

An analysis of equilibrium in the case of economies with two homogeneous types of agents is also presented, from which it can be deduced that in equilibrium under partial default the personal valuations of default for the buyer and the seller are equal.

KEYWORDS

General Equilibrium.

Incomplete Markets.

Default

ISSN (En línea) 2362 3225

INTRODUCCIÓN

En economías con determinado nivel de desarrollo es esperable que, bajo condiciones normales de funcionamiento, la producción supere al consumo destinándose ese excedente al ahorro, y por ende, en base a un criterio de eficiencia, a la inversión para incrementar el flujo de bienes futuros. Por ello, los mecanismos de transferencia intertemporal de ingresos resultan fundamentales, los cuales comienzan a fallar con la existencia de mercados incompletos como consecuencia de la poca disponibilidad de instrumentos financieros respecto de los eventos futuros posibles. Sin embargo, bajo la posibilidad de existencia de *default*, combinada con la exigencia de un colateral, contribuye a la corrección de estos problemas.

En una economía con mercados financieros incompletos, la posibilidad de incrementar la eficiencia en la asignación de recursos se ve obstaculizada por la carencia de activos apropiados en la cantidad necesaria tal que la cobertura de riesgo sea realizable en forma pareto-eficiente. En un contexto en el cual no existe la posibilidad de incumplimiento, las transacciones de activos podrían llegar a no realizarse. Sin embargo, si al agente se le diera la posibilidad de incumplir en aquellos estados en los cuales no tiene la cantidad de recursos necesaria para hacer frente a sus obligaciones y si además éstos tienen baja probabilidad de ocurrencia, las transacciones de activos serían posibles dado que, al asignársele baja probabilidad a un estado "inconveniente", el impacto de la pérdida en la utilidad esperada del agente es reducido. Por ello, con solo hacer frente a un castigo, si el mismo no es muy alto en comparación con las ganancias en términos de bienestar, el agente podría encontrarse mejor incumpliendo con su obligación en el estado malo que manteniéndose fuera de la compraventa de activos. De esta manera, el *default* pasa a ser voluntario, dependiendo del castigo impuesto al incumplidor.

Los trabajos de Dubey et al. (1989) y Zame (1993) introdujeron la idea de posibilidad de *default* en un contexto de equilibrio general. Dichos estudios, como varios que le siguieron (Zame-Geanakoplos (2000), Orillo (2001), Araujo et al. (2002) y Dubey et al. (2005) entre otros –ver referencias-), tienen como objetivo principal demostrar la existencia de equilibrio bajo este contexto. Sin embargo, la demostración de existencia por sí sola resulta insuficiente para poder hacer un análisis más profundo de sus propiedades. En este sentido, un estudio de la decisión individual óptima de los agentes en equilibrio contribuiría a la búsqueda de conclusiones de tipo cualitativo más generales que las presentadas en los ejemplos numéricos contenidos en algunos de los trabajos antes mencionados.

Teniendo en consideración esta necesidad, se presenta una caracterización del equilibrio general con *default* como así también un análisis de sus propiedades.

1. EL MODELO PS

En Pascoa-Seghir (2008) se considera una economía de horizonte infinito bajo tiempo discreto y existencia de incertidumbre. La estructura estocástica se encuentra descripta por un árbol infinito con una única raíz y una cantidad finita de ramas en cada nodo. Formalmente, sea $T = \{0,1,\ldots\}$ el conjunto de fechas y $\mathbf{F}_t$ el conjunto finito de historias que pueden ocurrir hasta el momento *t*. Un par $\xi = (t,\sigma) \in T \times \mathbf{F}_t$ es un *nodo* y $t = t(\xi)$ es la fecha del nodo ξ. El conjunto *D* consistente de todos los nodos es el *árbol de eventos*. Un nodo $\xi' = (t',\sigma')$ se dice que es un *sucesor* (resp. *estricto*) del nodo $\xi = (t,\sigma)$ si $t' \geq t$ (resp. $t' > t$) y $\sigma' \subset \sigma$. En este caso, escribimos $\xi' \geq \xi$ (resp. $\xi' > \xi$) y denotaremos por ξ^+ al conjunto de sucesores inmediatos de ξ. Si $\xi = (t,\sigma)$, $t \geq 1$, el único nodo $\xi^- = (t-1,\sigma')$ con y $\sigma \subset \sigma'$ es llamado *predecesor* de ξ. Llamamos ξ_0 al *nodo inicial*.

A continuación se detalla la notación utilizada:

- R : Conjunto de los números reales;
- $g \in G = \{1,\ldots,G\}$: conjunto de mercancías;
- $Y_\xi = \left[Y_{\xi,g}\right] \times \mathbf{I}_{\mathbf{G}\times\mathbf{G}} = \left(diag\ a(\xi,g)\right)$: estructura de depreciación en el nodo ξ [1];
- $i \in I = \{1,\ldots,I\}$: conjunto de agentes (comerciantes);
- $\omega^i = \left(\omega_g^i(\xi), (\xi,g) \in D\times G\right)$: dotaciones iniciales de i;
- $U^i = \sum_{\xi\in D} v_\xi^i(\bullet) + \gamma$: función de utilidad (separable) del agente i, en donde $v_\xi^i : R_+^G \to R$

es la utilidad derivada del consumo en ξ;

- $j \in J(\xi) = \{1,\ldots,\iota(\xi)\}$: conjunto de activos de un período disponibles en el nodo ξ;
- $A^j(\xi) \in R_+^G \setminus \mathbf{0}$: rendimiento unitario del activo $j \in J(\xi^-)$ a pagar en ξ;
- $C_j^\xi = \left\{C_{g,j}^\xi, \xi \in D, g \in G, j \in J(\xi)\right\} \in R_+^G \setminus \mathbf{0}$: coeficientes de colateral (exógenos) asociado al activo j;
- $\lambda_j^i(\xi) =$ penalidad del incumplimiento en el activo j percibido por el agente i en el nodo ξ;

Sea entonces la economía $E_{\mathrm{PS}} \equiv \left(\left(\omega^i,\lambda^i,U^i\right)_{i\in I}, A, \left(C_\xi^j\right)_{\xi\in D, j\in J(\xi)}, Y\right)$. Para definir el equilibrio, consideramos las variables macro p, q y K que cada agente percibe. De esta manera $p_\xi = \left(p_\xi^g, g\in G\right)$ es el vector de precios de los G bienes en el nodo ξ, $q_\xi = \left(q_\xi^j, j \in J(\xi)\right)$ es el vector de precios de los activos emitidos en el nodo ξ y $K_\xi^j \in [0,1]$ con $(\xi, j) \in D\times J(\xi^-)$ representa la tasa de pago esperada por el activo j en el nodo ξ.

Sean $x^i \in R_+^{G\times D}$ el plan contingente de consumo del agente i, $\theta^i(\xi) = \left(\theta_j^i(\xi), j\in J\right) \in \prod_{\xi\in D} R_+^{\iota(\xi)}$ y $\varphi^i(\xi) = \left(\varphi_j^i(\xi), j \in J\right) \in \prod_{\xi\in D} R_+^{\iota(\xi)}$ los planes contingentes de compra y venta, respectivamente, de activos y $\Delta_j^i(\xi) \in R_+^G$ la cantidad total de bienes efectivamente entregada por i en concepto de pago por j en ξ. Entonces, el conjunto presupuestario $B^i(p,\pi,K)$ del agente i está dado por

$$
\begin{aligned}
B^i(p,q,K) = \Big\{ \left(x^i,\theta^i,\varphi^i,\Delta^i\right) \in R_+^{G\times D} \times \prod_{\xi\in D} R_+^{\iota(\xi)} \times \prod_{\xi\in D} R_+^{\iota(\xi)} \times \prod_{\xi\in D} R_+^{\iota(\xi)\times G} :& \\
p_{\xi_0}\left[x^i(\xi_0) - \omega^i(\xi_0)\right] + p_{\xi_0} C^{\xi_0}\varphi^i(\xi_0) + q_{\xi_0}\left[\theta^i(\xi_0) - \varphi^i(\xi_0)\right] \le 0,& \\
p_\xi\left[x^i(\xi) - \omega^i(\xi)\right] + p_\xi C^\xi \varphi^i(\xi) + q_\xi\left[\theta^i(\xi) - \varphi^i(\xi)\right] + \sum_{j\in J(\xi^-)} \Delta_j^i(\xi) \le& \\
\le p_\xi\left[Y_\xi x^i(\xi^-) + Y_\xi C^{\xi^-}\varphi^i(\xi^-)\right] + \sum_{j\in J(\xi^-)} K_\xi^j p_\xi A^j(\xi)\theta_j^i(\xi^-),& \\
\Delta_j^i(\xi) \ge \varphi_j^i(\xi^-) \min\left\{p_\xi A^j(\xi), p_\xi Y_\xi C_j^\xi\right\}, \xi \in D\setminus\{\xi_0\} \Big\}&
\end{aligned}
$$

en donde adoptaremos la normalización $\left\|p_\xi\right\|_1 + \left\|q_\xi\right\|_1 = 1$ para cada $\xi \in D$.

[1] Diremos que un bien $g \in G$ es durable en el nodo $\xi \in D$ si $a(\xi, g)$ es distinta de cero y se anula en cualquier otro ξ.

El pago de $\left(x,\theta,\varphi,\Delta\right)$ en $B^i\left(p,q,K\right)$ para el agente *i* es

$$U^i\left(\tilde{x}^i,\theta^i,\varphi^i,\Delta^i\right)=\sum_{\xi\in D} v_\xi^i\left(\tilde{x}^i\left(\xi\right)\right)-\sum_{\xi\in D\setminus\{\xi_0\}}\sum_{j\in J\left(\xi^-\right)}\frac{\lambda_j^i\left(\xi\right)\max\left\{p_\xi A^j\left(\xi\right)\varphi_j^i\left(\xi^-\right)-\Delta_j^i\left(\xi\right),0\right\}}{p_\xi b\left(\xi\right)}$$

donde $\tilde{x}^i\left(\xi\right)\equiv x^i\left(\xi\right)+C^\xi\varphi^i\left(\xi\right)$ es el vector de bienes disponibles para el consumo en el nodo ξ, $\max\left\{p_\xi A^j\left(\xi\right)\varphi_j^i\left(\xi^-\right)-\Delta_j^i\left(\xi\right),0\right\}$ es el *default* de *i* sobre su promesa de entrega del activo *j* en el nodo ξ y $b\left(\xi\right)=\left(b\left(\xi,g\right),g\in G\right)$ es una canasta fija de referencia utilizada para deflactar el incumplimiento nominal de los agentes de la economía. De esta manera, se supone que la penalidad es lineal y separable en el monto total incumplido.

Un equilibrio en una economía PS es un vector $\left(\bar{p},\bar{q},\bar{K},\left(\bar{x}^i,\bar{\theta}^i,\bar{\varphi}^i,\bar{\Delta}^i\right)_{i\in I}\right)$ tal que $p_\xi>\mathbf{0}$ en todo nodo $\xi\in D$ y verifica:

(1) $\left(\bar{x}^i,\bar{\theta}^i,\bar{\varphi}^i,\bar{\Delta}^i\right)\in ArgMax\ U^i\left(x,\theta,\varphi,D\right)$ sobre $B^i\left(\bar{p},\bar{q},\bar{K}\right)$ para cada $i\in I$;

(2) $\sum_{i\in I}\left[\bar{x}^i\left(\xi_0\right)+C^{\xi_0}\bar{\varphi}^i\left(\xi_0\right)\right]=\sum_{i\in I}\omega^i\left(\xi_0\right)$;

(3) $\sum_{i\in I}\left[\bar{x}^i\left(\xi\right)+C^\xi\bar{\varphi}^i\left(\xi\right)\right]=\sum_{i\in I}\left[\omega^i\left(\xi\right)+Y_\xi\bar{x}^i\left(\xi^-\right)+Y_\xi C^{\xi^-}\bar{\varphi}^i\left(\xi^-\right)\right],\ \xi\in D\setminus\{\xi_0\}$;

(4) $\sum_{i\in I}\bar{\theta}^i=\sum_{i\in I}\bar{\varphi}^i$;

(5) $\bar{K}^j\left(\xi\right)\sum_{i\in I}\bar{p}_\xi A^j\left(\xi\right)\bar{\theta}_j^i\left(\xi^-\right)=\sum_{i\in I}\bar{\Delta}_j^i\left(\xi\right),\ \xi\in D/\{\xi_0\},\ j\in J\left(\xi^-\right)$.

La condición 1 indica que los agentes deben optimizar en equilibrio, dados los niveles de las variables macro. Las condiciones 2 y 3 exigen que los mercados de bienes se vacíen, mientras que la 4 exige lo mismo para los mercados de activos. La condición 5 dice que en equilibrio el repago de cada activo debe ser igual a lo que efectivamente pagan todos los emisores del mismo. Cabe remarcar que, en línea con el supuesto de competencia perfecta, cada potencial comprador de un activo *j* espera que el *default* contra él sea una proporción de los valores prometidos que se encuentra determinada por el mercado y no por su elección de θ_j^i. Diremos que el equilibrio es *no-trivial* si para todo (ξ,*j*) tenemos $\left(\bar{\theta}^i\left(\xi\right),\bar{\varphi}^i\left(\xi\right)\right)\neq\mathbf{0}$ o $\bar{K}_\xi^j>0$.

Sabemos que bajo determinadas condiciones sobre las funciones de utilidad, la dotación de recursos, la estructura de depreciación y el nivel de penalidad existe un equilibrio no trivial Pascoa-Seghir (2008, pg. 11) y, por ende, solución al problema de optimización del agente *i*.

Caracterización del equilibrio

Bajo estos supuestos, en el caso propuesto por Pascoa-Seghir (2008), el problema del agente *i* es el siguiente:

Problema P:

$$\underset{\left(x^i,\theta^i,\varphi^i,\Delta^i\right)}{Max}U^i=\sum_{\xi\in D} v_\xi^i\left(\tilde{x}^i\left(\xi\right)\right)-\sum_{\xi\in D\setminus\{\xi_0\}}\sum_{j\in J\left(\xi^-\right)}\frac{\lambda_j^i\left(\xi\right)\max\left\{p_\xi A^j\left(\xi\right)\varphi_j^i\left(\xi^-\right)-\Delta_j^i\left(\xi\right),0\right\}}{p_\xi b\left(\xi\right)}$$

sujeto a:

$$\begin{cases} p_{\xi_0}x^i(\xi_0)+p_{\xi_0}C^{\xi_0}\varphi^i(\xi_0)+q_{\xi_0}\left[\theta^i(\xi_0)-\varphi^i(\xi_0)\right]\le p_{\xi_0}\omega^i(\xi_0) \\ p_\xi x^i(\xi)+p_\xi C^\xi\varphi^i(\xi)+q_\xi\left[\theta^i(\xi)-\varphi^i(\xi)\right]+\sum_{j\in J(\xi^-)}\Delta_j^i(\xi)\le p_\xi\omega^i(\xi)+ \\ \quad +p_\xi\left[Y_\xi x^i(\xi^-)+Y_\xi C^{\xi^-}\varphi^i(\xi^-)\right]+\sum_{j\in J(\xi^-)}K_\xi^j p_\xi A^j(\xi)\theta_j^i(\xi^-),\ \forall\xi\in D\setminus\{\xi_0\} \\ \varphi_j^i(\xi^-)\min\left\{p_\xi A^j(\xi),p_\xi Y_\xi C_j^\xi\right\}\le\Delta_j^i(\xi)\ \ \forall(\xi,j)\in\left(D\setminus\{\xi_0\}\right)\times J \end{cases}$$

Claramente, cuando la función de utilidad U^i del agente *i* es estrictamente creciente en los estados futuros, todas las restricciones presupuestarias se cumplen con igualdad en el óptimo. A partir de ello, es inmediato que la condición de equilibrio en los mercados de bienes y activos asegura que tal situación se verifique para la totalidad de los agentes de la economía.

La no-diferenciabilidad de la función objetivo del agente *i* en aquellos puntos en los cuales $p_\xi A^j(\xi)\varphi_j^i(\xi^-)=\Delta_j^i(\xi)$ genera inconvenientes a la hora de querer aplicar las condiciones de Kuhn-Tucker para estudiar las propiedades de la decisión óptima individual en el equilibrio. De hecho, a menos que el agente haga *default* (o pague por encima de lo prometido) en cada uno de los estados, el óptimo se dará precisamente en uno de los puntos de no-diferenciabilidad de U^i.

En este sentido, las siguientes dos proposiciones tomadas conjuntamente muestran de manera formal que la optimización planteada por Pascoa-Seghir (2008) es equivalente al problema en el cual se supone que los agentes son retribuidos por realizar pagos por encima de sus compromisos, pero se ven imposibilitados de hacerlo. De esta manera, esta simple observación nos permite replantear el problema de optimización del agente de manera tal que la función objetivo sea diferenciable en todo su dominio y, por ende, también sean aplicables las condiciones de Kuhn-Tucker para el estudio de sus propiedades.

Proposición 1: Si en equilibrio $(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)$ las restricciones presupuestarias se cumplen con igualdad para *i* en todo $\xi\in D\setminus\{\xi_0\}$ y U^i es estrictamente creciente en $x^i(\xi)$, entonces se tiene $\Delta_j^i{}^*(\xi)\le p_\xi A^j(\xi)\varphi_j^i{}^*(\xi^-)$ para todo $(\xi,j)\in\left(D\setminus\{\xi_0\}\right)\times J$, es decir, en ningún estado futuro el agente *i* paga montos superiores a los comprometidos por la venta de un activo.

Demostración: Supongamos que no es cierto, con lo cual en el óptimo existirá algún $(\tilde\xi,\tilde j)\in\left(D\setminus\{\xi_0\}\right)\times J$ tal que $\Delta_{\tilde j}^i{}^*(\tilde\xi)>p_{\tilde\xi}A^{\tilde j}(\tilde\xi)\varphi_{\tilde j}^i{}^*(\tilde\xi^-)$. Al estar en un óptimo, un cambio en $\Delta_{\tilde j}^i(\tilde\xi)$ que respete la restricción presupuestaria para el estado $\tilde\xi$ no debería generar un aumento en U^i.

Proponemos el vector $(x^{**},\theta^*,\varphi^*,\Delta^{**})$, el cual únicamente difiere del óptimo original en las variables $\Delta_{\tilde j}^i(\tilde\xi)$ y $x_{\tilde g}^i(\tilde\xi)$ de manera tal que $\Delta_{\tilde j}^i{}^{**}(\tilde\xi)=\Delta_{\tilde j}^i{}^*(\tilde\xi)-\varepsilon$ y $x_{\tilde g}^i{}^{**}(\tilde\xi)=x_{\tilde g}^i{}^*(\tilde\xi)+\varepsilon/p_{\tilde\xi,\tilde g}$ donde $\varepsilon>0$ es una magnitud infinitesimal y $\tilde g$ es una mercancía con precio $p_{\xi,\tilde g}>0$ en equilibrio. Nótese que estos nuevos valores también satisfacen la restricción presupuestaria en $\tilde\xi$, como así también en todo $\xi'\in\tilde\xi^+$. A su vez, en lo que respecta a las restantes restricciones sobre $\Delta_j^i(\xi)$, sabemos que para la magnitud infinitesimal $\varepsilon>0$, la desigualdad estricta $\Delta_{\tilde j}^i{}^*(\tilde\xi)>p_{\tilde\xi}A^{\tilde j}(\tilde\xi)\varphi_{\tilde j}^i{}^*(\tilde\xi^-)$ implica:

$\Delta_{\bar{j}}^{i}**\left(\tilde{\xi}\right) > p_{\tilde{\xi}}A^{\bar{j}}\left(\tilde{\xi}\right)\varphi_{\bar{j}}^{i}*\left(\tilde{\xi}^{-}\right)$, con lo cual su cumplimiento queda asegurado para $\Delta_{\bar{j}}^{i}**\left(\tilde{\xi}\right)$ dado que si $p_{\tilde{\xi}}A^{\bar{j}}\left(\tilde{\xi}\right) < p_{\tilde{\xi}}Y_{\tilde{\xi}}C_{\bar{j}}^{\tilde{\xi}}$ el cumplimiento es inmediato mientras que si $p_{\tilde{\xi}}A^{\bar{j}}\left(\tilde{\xi}\right) \geq p_{\tilde{\xi}}Y_{\tilde{\xi}}C_{\bar{j}}^{\tilde{\xi}}$ se verifica:

$$\Delta_{\bar{j}}^{i}**\left(\tilde{\xi}\right) > p_{\tilde{\xi}}A^{\bar{j}}\left(\tilde{\xi}\right)\varphi_{\bar{j}}^{i}*\left(\tilde{\xi}^{-}\right) \geq p_{\tilde{\xi}}Y_{\tilde{\xi}}C_{\bar{j}}^{\tilde{\xi}}\varphi_{\bar{j}}^{i}*\left(\tilde{\xi}^{-}\right).$$

De esta manera $\left(x**,\theta*,\varphi*,\Delta**\right)$ es también un vector admisible del problema. El impacto de este cambio en $\Delta_{\bar{j}}^{i}\left(\tilde{\xi}\right)$ y $x_{\bar{g}}^{i}\left(\tilde{\xi}\right)$ sobre la utilidad del agente *i* puede analizarse en tres partes:

1. *Sobre la utilidad del consumo presente*: $x_{\bar{g}}^{i}*\left(\xi_{0}\right)$ sólo puede variar si lo hace cualquier otra variable de la restricción presupuestaria en $\xi_{0}=0$. Puesto que $x_{\bar{g}}^{i}\left(\tilde{\xi}\right)$ y $\Delta_{\bar{j}}^{i}\left(\tilde{\xi}\right)$ no aparecen en ella, y como hemos mantenido constante $\theta_{j}^{i}*$ y $\varphi_{j}^{i}*$, entonces la utilidad del consumo presente no se ve alterada por el pasaje de $\left(x*,\theta*,\varphi*,\Delta*\right)$ a $\left(x**,\theta*,\varphi*,\Delta**\right)$.

2. *Sobre la utilidad del consumo futuro:*

a) *Si* $\xi \notin \tilde{\xi}^{+} \cup \left\{\tilde{\xi}\right\}$*:* $x^{i}*\left(\tilde{\xi}\right)$ sólo puede variar si lo hace alguna variable de la restricción presupuestaria correspondiente. Como ello no ocurre, no hay un cambio en la utilidad del consumo futuro en estos estados.

b) *Si* $\xi \in \tilde{\xi}^{+} \cup \left\{\tilde{\xi}\right\}$*:* Como

$$p_{\tilde{\xi},\bar{g}}\left(x_{\bar{g}}^{i}**\left(\tilde{\xi}\right)-x_{\bar{g}}^{i}*\left(\tilde{\xi}\right)\right)=-\left(\Delta_{\bar{j}}^{i}**\left(\tilde{\xi}\right)-\Delta_{\bar{j}}^{i}*\left(\tilde{\xi}\right)\right),$$

el lado izquierdo de la restricción presupuestaria del estado $\tilde{\xi}$ permanece inalterado, mientras que para las restricciones correspondientes a los estados $\xi' \in \tilde{\xi}^{+}$ la desigualdad se preserva para $x_{\bar{g}}^{i}**\left(\xi_{0}\right)$ al haberse satisfecho para $x_{\bar{g}}^{i}*\left(\xi_{0}\right)$. La monotonicidad creciente de U^{i} hace que el pasaje de $x_{\bar{g}}^{i}*\left(\xi_{0}\right)$ a $x_{\bar{g}}^{i}**\left(\xi_{0}\right)$ incremente la utilidad del consumo futuro en el estado $\tilde{\xi}$.

3. *Sobre la desutilidad de la penalidad:* Puesto que en ambos puntos se verifica $p_{\tilde{\xi}}A^{\bar{j}}\left(\tilde{\xi}\right)\varphi_{\bar{j}}^{i}\left(\tilde{\xi}^{-}\right)-\Delta_{\bar{j}}^{i}\left(\tilde{\xi}\right)<0$, el monto de la penalidad permanece inalterado en el cambio y, por ende, también la desutilidad por penalidad del agente *i*.

Puede verse entonces que $\left(x**,\theta*,\varphi*,\Delta**\right)$ le genera a *i* una utilidad total mayor a $\left(x*,\theta*,\varphi*,\Delta*\right)$, con lo cual este último no puede ser un óptimo de *i*.

Consideremos el siguiente problema

Problema P':

$$\underset{\left(x^{i},\theta^{i},\varphi^{i},\Delta^{i}\right)}{Max}\ \widehat{U}^{i}=\sum_{\xi\in D}v_{\xi}^{i}\left(\tilde{x}^{i}\left(\xi\right)\right)-\sum_{\xi\in D\setminus\{\xi_{0}\}}\ \sum_{j\in J\left(\xi^{-}\right)}\frac{\lambda_{j}^{i}\left(\xi\right)\left(p_{\xi}A^{j}\left(\xi\right)\varphi_{j}^{i}\left(\xi^{-}\right)-\Delta_{j}^{i}\left(\xi\right)\right)}{p_{\xi}b\left(\xi\right)}$$

sujeto a:

$$\begin{cases} p_{\xi_0}x^i(\xi_0)+p_{\xi_0}C^{\xi_0}\varphi^i(\xi_0)+q_{\xi_0}\left[\theta^i(\xi_0)-\varphi^i(\xi_0)\right]=p_{\xi_0}\omega^i(\xi_0) \\ p_\xi x^i(\xi)+p_\xi C^\xi\varphi^i(\xi)+q_\xi\left[\theta^i(\xi)-\varphi^i(\xi)\right]+\sum_{j\in J(\xi^-)}\Delta_j^i(\xi)=p_\xi\omega^i(\xi)+ \\ \quad +p_\xi\left[Y_\xi x^i(\xi^-)+Y_\xi C^{\xi^-}\varphi^i(\xi^-)\right]+\sum_{j\in J(\xi^-)}K_\xi^j p_\xi A^j(\xi)\theta_j^i(\xi^-)\ \forall\xi\in D\setminus\{\xi_0\} \\ \varphi_j^i(\xi^-)\min\left\{p_\xi A^j(\xi),p_\xi Y_\xi C_j^\xi\right\}\le\Delta_j^i(\xi)\ \forall(\xi,j)\in(D\setminus\{\xi_0\})\times J \\ \Delta_j^i(\xi)\le p_\xi A^j(\xi)\varphi_j^i(\xi^-)\ \forall(\xi,j)\in(D\setminus\{\xi_0\})\times J \end{cases}$$

que difiere del problema P en la función de penalidad, en la igualdad de las restricciones presupuestarias de los estados $\xi\in D$ y en la incorporación de las restricciones de no-negatividad de $\Delta_j^i(\xi)-p_\xi A^j(\xi)\varphi_j^i(\xi^-)$. De esta manera, mientras en el problema original el agente no recibe retribución alguna por pagar por encima de sus obligaciones, en este nuevo problema sí las recibiría, pero se encuentra imposibilitado de hacerlo.

A su vez considérese el *Problema P* al cual se le exige además el cumplimiento como igualdad de todas las restricciones presupuestarias. Llamamos a este problema modificado *Problema P**. Por aplicación de la proposición 1, si $(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)$ es óptimo en *P**, entonces lo es en *P'*. La siguiente proposición muestra que la recíproca también es cierta.

Proposición 2: Bajo las condiciones presentadas en la proposición 1, si $(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)$ es óptimo en *P'*, entonces lo es en *P**.

Demostración: Sean los conjuntos:

$$\begin{aligned} C=\Big\{(x,\theta,\varphi,\Delta)\in B^i(\bar{p},\bar{\pi},\bar{K}):\ & p_{\xi_0}x^i(\xi_0)+p_{\xi_0}C^{\xi_0}\varphi^i(\xi_0)+q_{\xi_0}\left[\theta^i(\xi_0)-\varphi^i(\xi_0)\right]=p_{\xi_0}\omega^i(\xi_0), \\ & p_\xi x^i(\xi)+p_\xi C^\xi\varphi^i(\xi)+q_\xi\left[\theta^i(\xi)-\varphi^i(\xi)\right]+\sum_{j\in J(\xi^-)}\Delta_j^i(\xi)=p_\xi\omega^i(\xi)+ \\ & +p_\xi\left[Y_\xi x^i(\xi^-)+Y_\xi C^{\xi^-}\varphi^i(\xi^-)\right]+\sum_{j\in J(\xi^-)}K_\xi^j p_\xi A^j(\xi)\theta_j^i(\xi^-), \\ & \varphi_j^i(\xi^-)\min\left\{p_\xi A^j(\xi),p_\xi Y_\xi C_j^\xi\right\}\le\Delta_j^i(\xi),(\xi,j)\in(D\setminus\{\xi_0\})\times J\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M=\Big\{(x,\theta,\varphi,\Delta)\in R_+^{G\times D}\times R_+^J\times R_+^J\times R_+^{G\times D\times J}:& \\ \Delta_j^i(\xi)\le p_\xi A^j(\xi)\varphi_j^i(\xi^-)\ \forall(\xi,j)\in(D\setminus\{\xi_0\})\times J\Big\}& \end{aligned}$$

Por construcción sabemos que $U^i=\widehat{U}^i$ para todo $(x,\theta,\varphi,\Delta)\in(C\cap M)$. Como $(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)\in(C\cap M)$ es óptimo en *P'*, para todo $(x,\theta,\varphi,\Delta)\in(C\cap M)$ se verifica

$$\max_{C\cap M}\widehat{U}^i=\widehat{U}^i(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)=U^i(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)=\max_{C\cap M}U^i.$$

Demostraremos que $\max_C U^i=\max_{C\cap M}U^i$. Supongamos que no es cierto, entonces el óptimo en *P** debe pertenecer a (*C* ~*M*). Sin embargo, esto contradice el resultado de la proposición 1 que exige que el óptimo en *P** pertenezca a $(C\cap M)$. Entonces $(x^*,\theta^*,\varphi^*,\Delta^*)$ es óptimo en *P**. □

A diferencia del problema original, el problema *P'* tiene la ventaja de poder tratarse mediante las condiciones (necesarias) de Kuhn-Tucker. Esto es así dado que la nueva función objetivo es diferenciable en todo su dominio y las restricciones son todas lineales, con lo cual la calificación de restricciones siempre se cumple en el óptimo.

Esta equivalencia entre los problemas P' y P^* nos permite formular el siguiente corolario.

Corolario 2': Si bajo un estado $\xi' \in D \setminus \{\xi_0\}$ el pago prometido del activo j', $p_{\xi'} A^{j'}(\xi')$, no supera el valor del colateral remanente del agente *i*, $p_{\xi'} Y_{\xi'} C_{j'}^{\xi'}$, el agente *i* no incumplirá con su pago en equilibrio.

Demostración: Inmediata ya que cuando para algún $(\xi', j') \in (D \setminus \{\xi_0\}) \times J$ se verifica $p_{\xi'} A^{j'}(\xi') \le p_{\xi'} Y_{\xi'} C_{j'}^{\xi'}$, las restricciones correspondientes de monto mínimo pagado $\varphi_{j'}^i(\xi'^-) \min\{p_{\xi'} A^{j'}(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_{j'}^{\xi'}\} \le \Delta_{j'}^i(\xi')$ y las nuevas restricciones de monto máximo entregado $\Delta_{j'}^i(\xi') \le p_{\xi'} A^{j'}(\xi') \varphi_{j'}^i(\xi'^-)$ colapsan en una única restricción de igualdad $\Delta_{j'}^i(\xi') = p_{\xi'} A^{j'}(\xi') \varphi_{j'}^i(\xi'^-)$.□

Claramente este cumplimiento se debe a que el colateral remanente del agente *i* es suficiente para cubrir el pago comprometido, con lo cual cumple entregando los bienes prometidos por el activo que vendió o bien el colateral. La posibilidad de *default* aparece cuando el valor del colateral remanente es inferior al de los pagos prometidos por el activo, dado que si bien el agente *i* tiene comprometido su colateral, puede aún incumplir con el remanente de su deuda. Entonces diremos que el *default* del activo *j* en ξ es *total* si únicamente se realiza la entrega del colateral asociado sin honrar la deuda remanente, es decir $\Delta_j^i(\xi) = \varphi_j^i(\xi^-) p_\xi Y_\xi C_j^\xi \ge 0$. El *default* será *parcial* cuando el pago sea superior al valor del colateral asociado sin llegar a cumplir con la totalidad de los compromisos asumidos, en símbolos

$$\Delta_j^i(\xi) \in \left(\varphi_j^i(\xi^-) p_\xi Y_\xi C_j^\xi, p_\xi A^j(\xi) \varphi_j^i(\xi^-)\right) \subset R^+.$$

Sean μ_ξ^i, $\eta_{j,\xi}^i$ y $\delta_{j,\xi}^i$, $(\xi, j) \in D \times J$, los multiplicadores de Lagrange de las restricciones presupuestarias, de pago mínimo $\varphi_j^i(\xi^-) \min\{p_\xi A^j(\xi), p_\xi Y_\xi C_j^\xi\} \le \Delta_j^i(\xi)$ y de pago máximo $\Delta_j^i(\xi) \le p_\xi A^j(\xi) \varphi_j^i(\xi^-)$ respectivamente. En el óptimo se verifica:

[1] $$\frac{\partial v_\xi^i}{\partial \tilde{x}_g^i(\xi)}\left(x^i * (\tilde{\xi})\right) \le \mu_\xi^i * p_{\xi,g} - \sum_{\xi' \in \xi^+} \mu_{\xi'}^i * p_{\xi',g} Y_{\xi',g}, \ (\xi, g) \in D \times G,$$

con igualdad si $x_g^i * (\xi) > 0$;

[2] $$\sum_{\xi' \in \xi^+} \mu_{\xi'}^i * K_{\xi'}^j p_{\xi'} A^j(\xi') \le \mu_\xi^i * q_{\xi,j}, \ (\xi, j) \in D \times J,$$

con igualdad si $\theta_j * (\xi) > 0$;

[3] $$\sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\left(\lambda_j^i(\xi') - \delta_{j,\xi'}^i * p_{\xi'} b(\xi')\right) p_{\xi'} A^j(\xi')}{p_{\xi'} b(\xi')} \ge \sum_{g \in G} \frac{\partial v_\xi^i}{\partial \tilde{x}_g^i(\xi)} C_{g,j}^\xi +$$

$$+\mu_\xi^i * \left[q_{\xi,j} - \sum_{g \in G} p_{\xi,g} C_{g,j}^\xi\right] + \sum_{\xi' \in \xi^+} \mu_{\xi'}^i * \left(\sum_{g \in G} p_{\xi',g} Y_{\xi',g} C_{g,j}^\xi\right) -$$

$$-\sum_{\xi' \in \xi^+} \eta_{j,\xi'}^i * \min\{p_{\xi'} A^j(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_j^{\xi'}\}, \ (\xi, j) \in D \times J,$$

con igualdad si $\varphi_j * (\xi) > 0$;

[4] $\mu^i_\xi * \geq \dfrac{\lambda^i_j(\xi)}{p_\xi b(\xi)} + \left(\eta^i_{j,\xi} * - \delta^i_{j,\xi} *\right)$, $(\xi, j) \in \left(D \setminus \{\xi_0\}\right) \times J$,

con igualdad si $\Delta^i_j * (\xi) > 0$;

[5] $p_{\xi_0} x^i * (\xi_0) + p_{\xi_0} C^{\xi_0} \varphi^i * (\xi_0) + q_{\xi_0} \left[\theta^i * (\xi_0) - \varphi^i * (\xi_0)\right] = p_{\xi_0} \omega^i (\xi_0)$,

$\mu^i_{\xi_0} * \geq 0$;

[6] $p_\xi x^i * (\xi) + p_\xi C^\xi \varphi^i * (\xi) + q_\xi \left[\theta^i * (\xi) - \varphi^i * (\xi)\right] + \sum_{j \in J(\xi^-)} \Delta^i_j * (\xi) = p_\xi \omega^i (\xi) +$

$+ p_\xi \left[Y_\xi x^i * (\xi^-) + Y_\xi C^{\xi^-} \varphi^{*i} (\xi^-)\right] + \sum_{j \in J(\xi^-)} K^j_\xi p_\xi A^j (\xi) \theta^i_j * (\xi^-)$, $\mu^i_\xi * \geq 0$,

$\xi \in D \setminus \{\xi_0\}$;

[7] $\varphi^i_j * (\xi^-) \min\left\{p_\xi A^j(\xi), p_\xi Y_\xi C^\xi_j\right\} \leq \Delta^i_j * (\xi)$, $\eta^i_{j,\xi} * \geq 0$,

$\eta^i_{j,\xi} * \left(\Delta^i_j * (\xi) - \varphi^i_j * (\xi^-) \min\left\{p_\xi A^j(\xi), p_\xi Y_\xi C^\xi_j\right\}\right) = 0$,

$(\xi, j) \in \left(D \setminus \{\xi_0\}\right) \times J$ [2];

[8] $\Delta^i_j * (\xi) \leq p_\xi A^j(\xi) \varphi^i_j * (\xi^-)$, $\delta^i_{j,\xi} * \geq 0$,

$\delta^i_{j,\xi} * \left(p_\xi A^j(\xi) \varphi^i_j * (\xi^-) - \Delta^i_j * (\xi)\right) = 0$, $(\xi, j) \in \left(D \setminus \{\xi_0\}\right) \times J$ [3].

De esta manera, por aplicación de la proposición 2, todo óptimo del problema *P* que satisface como igualdad todas las restricciones presupuestarias verifica las condiciones [1] a [8]. De aquí en adelante nos concentraremos en este tipo de equilibrios, con lo cual utilizaremos precisamente estas condiciones para el estudio de sus propiedades.

Puede verse que la formulación del problema *P* mediante las condiciones [1] a [8] involucra la incorporación de las variables $\delta^i_{j,\xi}$. Para dar una interpretación a estas nuevas variables es conveniente escribir sus restricciones asociadas como $\Delta^i_j(\xi) - p_\xi A^j(\xi) \varphi^i_j(\xi^-) \leq \zeta^i_{j,\xi}$, donde

---

[2] Nótese que siempre que en equilibrio el monto entregado $\Delta^i_j(\xi)$ supere al mínimo entre el valor del colateral remanente $p_\xi Y_\xi C^\xi_j \varphi^i_j(\xi^-)$ y el valor de los bienes comprometidos al pago $p_\xi A^j(\xi) \varphi^i_j(\xi^-)$, $\eta^i_{j,\xi} * = 0$, caso contrario puede ser igual a 0 o tomar valores positivos.

[3] Nótese que bajo *default* de *j* en ξ, indefectiblemente $\delta^i_{j,\xi} * = 0$, mientras que con cumplimiento $\delta^i_{j,\xi} *$ puede ser igual a 0 o tomar valores positivos.

$\zeta^{i}_{j,\xi}$ (igual a cero en *P'*) representa el monto máximo que se le permite a *i* pagar bajo ξ por encima de las obligaciones asumidas con la venta del activo *j*. De esta manera, $\delta^{i}_{j,\xi}*$ indica el incremento de la utilidad máxima de *i* como consecuencia de un aumento en el monto máximo permitido a pagar *j* en ξ. En términos del problema original *P*, estas nuevas restricciones implicarían una función de utilidad igual a

$$U^{i}_{\zeta}=\sum_{\xi\in D}v^{i}_{\xi}\left(\tilde{x}(\xi)\right)-\sum_{\xi\in D\setminus\{\xi_0\}}\sum_{j\in J\left(\xi^{-}\right)}\frac{\lambda^{i}_{j}(\xi)\max\left\{p_{\xi}A^{j}(\xi)\varphi^{i}_{j}\left(\xi^{-}\right)-\Delta^{i}_{j}(\xi),\zeta^{i}_{j,\xi}\right\}}{p_{\xi}b(\xi)},$$

con lo cual $\delta^{i}_{j,\xi}*$ nos dice en cuánto se incrementaría la utilidad máxima de *i* si la penalidad por incumplimiento de *j* bajo ξ comenzara a operar a niveles mayores a $\zeta^{i}_{j,\xi}$ (igual a cero en *P**).

Con respecto a los restantes multiplicadores, definimos el ingreso nominal en el nodo inicial ξ_0 como $\Omega_{\xi_0}\equiv p_{\xi_0}\omega^{i}(\xi_0)\in R^{+}$, en $\xi\in D\setminus\{\xi_0\}$ como

$$\Omega_{\xi}\equiv p_{\xi}\omega^{i}(\xi)+p_{\xi}\left[Y_{\xi}x^{i}\left(\xi^{-}\right)+Y_{\xi}C^{\xi^{-}}\varphi^{i}\left(\xi^{-}\right)\right]+\sum_{j\in J\left(\xi^{-}\right)}K^{j}_{\xi}p_{\xi}A^{j}(\xi)\theta^{i}\left(\xi^{-}\right)\in R^{+},$$

y el mínimo entre el valor del rendimiento del activo *j* vendido en ξ^{-} y del colateral asociado como

$$\Gamma_{\xi,j}\equiv\varphi^{i}\left(\xi^{-}\right)\min\left\{p_{\xi}A^{j}(\xi),p_{\xi}Y(\xi)C^{j}(\xi)\right\}\in R^{+}_{0},$$

valores constantes en los nodos respectivos. Entonces para todo $\xi\in D$ tenemos que $\left(\partial U^{i}/\partial\Omega_{\xi}\right)*=\mu^{i}_{\xi}*$ y $\left(\partial U^{i}/\partial\Gamma_{\xi,j}\right)*=-\eta_{j,\xi}*$, con lo cual $\mu^{i}_{\xi}*$ representa la utilidad marginal óptima del ingreso monetario en *ξ*, mientras que $\eta^{i}_{j,\xi}*$ es igual a la desutilidad marginal óptima del pago mínimo exigido por parte del activo *j* en el nodo *ξ*.

Resulta evidente que para dos activos de igual precio, el agente *i* preferirá incumplir aquel que tenga una penalidad menor. Las siguientes dos proposiciones permiten ver que tal situación también se verifica *para todo vector de precios de equilibrio*.

Proposición 3: Si bajo un estado $\xi'\in D\setminus\{\xi_0\}$ las penalidades $\lambda^{i}_{j}(\xi')$ difieren entre los distintos activos, es decir $\lambda^{i}_{j'}(\xi')\neq\lambda^{i}_{j''}(\xi')$ cuando $j'\neq j''$, en equilibrio el agente *i* hará *default* parcial en ξ' a lo sumo en un solo activo.

Demostración: Supongamos que en equilibrio bajo el estado $\xi'\in D\setminus\{\xi_0\}$ el agente *i* hace *default* parcial en los activos j' y j''. Por la condición [4] sabemos que

$$\mu^{i}_{\xi'}*=\lambda^{i}_{j'}(\xi')+\left(\eta^{i}_{j',\xi'}*-\delta^{i}_{j',\xi'}*\right)=\lambda^{i}_{j''}(\xi')+\left(\eta^{i}_{j'',\xi'}*-\delta^{i}_{j'',\xi'}*\right),$$

que por aplicación de las condiciones [7] y [8] queda $\mu^{i}_{\xi'}*=\lambda^{i}_{j'}(\xi')=\lambda^{i}_{j''}(\xi')$. Entonces, las penalidades son diferentes.

Es claro que si en equilibro en ξ' el agente *i*, vendedor de activos j' y j'', incumple j' de manera parcial con $\lambda^{i}_{j''}(\xi')<\lambda^{i}_{j'}(\xi')$, entonces no debería cumplir totalmente j'' en el mismo estado; caso contrario *i* podría incrementar su utilidad aumentando el grado de cumplimiento de j' a costa de incumplir j'' en igual monto. Por lo tanto, por la proposición 3, el *default* de j'' en

ξ' debe ser total, es decir que el agente *i* responde al pago de j'' en ξ' únicamente con su colateral.

Proposición 4: Sean dos activos j' y j'' que el agente *i* incumple en equilibrio bajo el estado ξ'. Si el incumplimiento de j' es total, $\lambda^i_{j''}(\xi') < \lambda^i_{j'}(\xi')$ y j'' es un activo con posibilidad de *default* en ξ', es decir $p_{\xi'}Y_{\xi'}C^{\xi'}_{j''} < p_{\xi'}A^{j''}(\xi')$, también es total el *default* en j''.

Demostración: Demostraremos que no puede haber *default* total de j' e incumplimiento parcial de j'' con penalidades $\lambda^i_{j''}(\xi') < \lambda^i_{j'}(\xi')$. Como j' se incumple totalmente, por [4], [7] y [8] tenemos $\mu^i_{\xi'}{*} \geq \lambda^i_{j'}(\xi')$, mientras que del *default* parcial de j'' se sigue $\mu^i_{\xi'}{*} = \lambda^i_{j''}(\xi') < \lambda^i_{j'}(\xi')$, donde la desigualdad es por hipótesis. Ambas expresiones no pueden ser ciertas simultáneamente.

De esta manera, si en ξ' el agente *i* incumpliera j^{Δ} totalmente, por la proposición 4 se sigue que lo mismo ocurrirá con todos aquellos activos con posibilidad de *default* de penalidad menor a la de j^{Δ}. Además sabemos que si *i* incumpliera parcialmente j°, todo activo *j* tal que $\lambda^i_{j^{\circ}}(\xi') < \lambda^i_j(\xi')$ no podría incumplirse; caso contrario se violaría para estos activos *j* o bien la proposición 3 (si el *default* de *j* fuera parcial) o bien la 4 (si el incumplimiento de *j* fuera total). De esta manera, sea $P(\xi')$ el conjunto de activos con posibilidad de *default* en el estado ξ', si en equilibrio *i* hace *default* parcial de j° y además se verifica $\lambda^i_1(\xi') < \ldots < \lambda^i_{(j^{\circ}-1)}(\xi') < \lambda^i_{j^{\circ}}(\xi') < \lambda^i_{(j^{\circ}+1)}(\xi') < \ldots < \lambda^i_J(\xi')$, los activos $j \in \{1, \ldots, j^{\circ}-1\} \setminus P(\xi')$ se incumplirán totalmente, mientras que en los restantes $j \in \{j^{\circ}+1, \ldots, J\}$ no existirá *default* alguno bajo ξ'.

Interpretación de los resultados

Nos concentraremos ahora en el caso en el cual la solución es no-nula tanto en las variables de consumo como en los multiplicadores de Lagrange. Bajo esta situación tenemos que en el óptimo se verifica:

[9] $$\frac{\partial v^i_{\xi}}{\partial \tilde{x}^i_g(\xi)}\left(x^i{*}(\xi)\right) = \mu^i_{\xi}{*}\, p_{\xi,g} - \sum_{\xi' \in \xi^+} \mu^i_{\xi'}{*}\, p_{\xi',g} Y_{\xi',g}\,,\ x^i_g{*}(\xi) > 0,\qquad (\xi, g) \in D \times G;$$

[10] $$\mu^i_{\xi}{*}\, q_{\xi,j} \geq \sum_{\xi' \in \xi^+} \mu^i_{\xi'}{*}\, K^j_{\xi'} p_{\xi'} A^j(\xi'),\ \theta_j{*}(\xi) > 0,\ (\xi, j) \in D \times J;$$

[11] $$\sum_{g \in G} \frac{\partial v^i_{\xi}}{\partial \tilde{x}^i_g(\xi)} C^{\xi}_{g,j} + \mu^i_{\xi}{*}\, q_{\xi,j} \leq \mu^i_{\xi}{*} \sum_{g \in G} p_{\xi,g} C^{\xi}_{g,j} - \sum_{\xi' \in \xi^+} \mu^i_{\xi'}{*}\left(\sum_{g \in G} p_{\xi',g} Y_{\xi',g} C^{\xi}_{g,j}\right) + \\ + \sum_{\xi' \in \xi^+} \eta^i_{j,\xi'}{*} \min\left\{p_{\xi'} A^j(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C^{\xi'}_j\right\} + \sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\left(\lambda^i_j(\xi') - \delta^i_{j,\xi'}{*}\, p_{\xi'} b(\xi')\right) p_{\xi'} A^j(\xi')}{p_{\xi'} b(\xi')},\qquad \varphi_j{*}(\xi) > 0,\ (\xi, j) \in D \times J;$$

[12] $\mu_{\xi}^{i}* \geq \dfrac{\lambda_{j}^{i}(\xi)}{p_{\xi}b(\xi)} + \left(\eta_{j,\xi}^{i}* - \delta_{j,\xi}^{i}*\right)$, $\Delta_{j}^{i}*(\xi) > 0$, $(\xi, j) \in \left(D \setminus \{\xi_0\}\right) \times J$.

Estas fórmulas pueden interpretarse de la siguiente manera:

- Decisión de consumo de x_g en *ξ*: $Y_{\xi',g}$ representa el remanente de una unidad del bien *g* en ξ' luego de su consumo en ξ, con lo cual $p_{\xi',g}Y_{\xi',g}$ es el valor de mercado de ese remanente y $\mu_{\xi'}^{i} * p_{\xi',g}Y_{\xi',g}$ la utilidad que este valor genera al agente *i* en el óptimo. A su vez, esta unidad de *g* en el nodo predecesor, y por lo tanto con anterioridad a su depreciación, tiene un valor de mercado igual a $p_{\xi,g}$, con lo cual $\mu_{\xi}^{i} * p_{\xi,g}$ representa la utilidad que generaba a *i* el valor del mismo bien en el estado precedente *ξ*. En equilibrio, y para variaciones infinitesimales de x_g en el óptimo, la utilidad marginal derivada del consumo de x_g es igual a la desutilidad marginal del ingreso derivada de la depreciación en términos de valor esperado de mercado de este mismo bien *g* como consecuencia de su consumo en *ξ*.
- Decisión de compra del activo *j* en ξ: $\mu_{\xi}^{i} * q_{\xi,j}$ es la desutilidad marginal óptima del pago derivado de la compra del activo *j* en el nodo *ξ*. Por otro lado, $K_{\xi'}^{j} p_{\xi'} A^{j}(\xi')$ representa lo que el agente *i* efectivamente recibirá en concepto de pago en *ξ'* por ese mismo activo *j*, el cual incrementará su utilidad en $\mu_{\xi'}^{i} * K_{\xi'}^{j} p_{\xi'} A^{j}(\xi')$ por unidad de activo adquirido en el óptimo. De esta manera $\sum_{\xi' \in \xi^{+}} \mu_{\xi'}^{i} * K_{\xi'}^{j} p_{\xi'} A^{j}(\xi')$ es la utilidad marginal esperada óptima de los pagos efectivamente realizados por el activo *j*. Si la cantidad demandada por *i* del activo *j* es positiva en el óptimo, entonces la condición se cumple como igualdad y ambas magnitudes coinciden.
- Decisión de venta del activo *j* en *ξ*: $C_{g,j}^{\xi}$ es la parte del colateral mantenido por *i* en bien *g* por la venta de una unidad de activo *j*, con lo cual $\sum_{g \in G} \dfrac{\partial v_{\xi}^{i}}{\partial \tilde{x}_{g}^{i}(\xi)} C_{g,j}^{\xi}$ es la utilidad marginal derivada de su consumo del colateral que *i* necesita mantener para poder realizar la venta de dicho activo, mientras que $\mu_{\xi}^{i} * q_{j,\xi}$ $\mu_{\xi}^{i} q_{j,\xi}$ es la utilidad marginal derivada del ingreso obtenido por incrementar dicha venta. Por otra parte, $\sum_{g \in G} p_{\xi,g} C_{g,j}^{\xi}$ es el valor de mercado del colateral, siendo $\mu_{\xi}^{i} * \sum_{g \in G} p_{\xi,g} C_{g,j}^{\xi}$ la desutilidad marginal óptima derivada de reducirlo infinitesimalmente. Como $\sum_{g \in G} p_{\xi',g} Y_{\xi',g} C_{g,j}^{\xi}$ indica el remanente de este colateral en *ξ'* una vez consumido en *ξ*, la diferencia $\left[\mu_{\xi}^{i} * \sum_{g \in G} p_{\xi,g} C_{g,j}^{\xi} - \sum_{\xi' \in \xi^{+}} \mu_{\xi'}^{i} * \left(\sum_{g \in G} p_{\xi',g} Y_{\xi',g} C_{g,j}^{\xi}\right)\right]$ es, para variaciones infinitesimales en torno del óptimo, la desutilidad marginal derivada de la depreciación en valor por consumo del colateral. Además, como $\min\left\{p_{\xi'} A^{j}(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_{j}^{\xi'}\right\}$ es el monto mínimo por unidad de activo *j* vendido que *i* indefectiblemente debe entregar como pago, $\sum_{\xi' \in \xi^{+}} \eta_{\xi'}^{i} * \min\left\{p_{\xi'} A^{j}(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_{j}^{\xi'}\right\}$ es la desutilidad marginal óptima de ese mayor compromiso derivado de incrementar en una unidad las ventas de activo *j*. A su vez, dado que bajo *default* $\delta_{j,\xi}^{i} = 0$,

- $\sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\left(\lambda_j^i(\xi') - \delta_{j,\xi'}^i * p_{\xi'} b(\xi')\right) p_{\xi'} A^j(\xi')}{p_{\xi'} b(\xi')}$ es la penalidad marginal derivada de incumplir con

los pagos del activo *j*. Si la cantidad vendida del activo *j* es positiva, la suma de las utilidades marginales derivadas del consumo del colateral necesario que debe mantenerse, mayores ingresos por ventas de ese activo y por incumplimiento debe ser igual a la suma de las desutilidades marginales derivadas de la reducción en valor del colateral por consumo (depreciación), por las mayores penalidades derivadas del incumplimiento en los pagos comprometidos y por los mayores compromisos asumidos.

- Decisión de pago en ξ de lo comprometido por la venta del activo *j*: Hay tres casos que pueden presentarse respecto de los pagos de *j* en el estado ξ.

1. *Default* parcial: Como $\Delta_j^i *(\xi) > \varphi_j^i *(\xi^-) \min\left\{p_\xi A^j(\xi), p_\xi Y_\xi C_j^\xi\right\}$, entonces $\eta_{j,\xi}^i * = 0$. A su vez, como $\Delta_j^i *(\xi) < p_\xi A^j(\xi) \varphi_j^i *(\xi^-)$, tenemos que $\delta_{j,\xi}^i * = 0$. De esta manera, la condición [4] queda reducida a $\mu_\xi^i * = \left(\lambda_j^i(\xi) / p_\xi b(\xi)\right)$ con lo cual la desutilidad marginal derivada de una mayor penalidad por incumplimiento nominal del activo *j* en ξ debe ser igual a la utilidad marginal del ingreso obtenido por *i* a partir de ese mismo incumplimiento.

2. *Default* total: Si bien $\delta_{j,\xi}^i * = 0$ al ser $\Delta_j^i *(\xi) < p_\xi A^j(\xi) \varphi_j^i *(\xi^-)$, el cumplimiento con igualdad de la restricción de pago mínimo hace que tengamos que $\eta_{j,\xi}^i * \geq 0$, con lo cual la condición [4] queda $\mu_\xi^i * \geq \left(\lambda_j^i(\xi) / p_\xi b(\xi)\right) + \eta_{j,\xi}^i *$ y, por ende

$$\mu_\xi^i * \geq \left(\lambda_j^i(\xi) / p_\xi b(\xi)\right).$$

De esta manera, la desutilidad marginal por incumplimiento puede ser mayor a la utilidad marginal derivada del mayor ingreso asociado a él.

3. Cumplimiento: Aquí $\eta_{j,\xi}^i * = 0$, pero $\delta_{j,\xi}^i * \geq 0$. Por ende, [4] queda $\mu_\xi^i * = \left(\lambda_j^i(\xi) / p_\xi b(\xi)\right) - \delta_{j,\xi}^i *$, con lo cual $\mu_\xi^i * \leq \left(\lambda_j^i(\xi) / p_\xi b(\xi)\right)$.

A partir de la desigualdad, [10] obtenemos

$$q_{\xi,j} \geq \sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\mu_{\xi'}^i}{\mu_\xi^i *} * K_{\xi'}^j p_{\xi'} A^j(\xi') \; \forall j \in J. \quad [13]$$

Por otra parte, combinando [11] y [12] y utilizando [9] se verifica que

$$\begin{aligned} q_{\xi,j} \leq & \sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\mu_{\xi'}^i *}{\mu_\xi^i *} \min\left\{p_{\xi'} A^j(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_j^{\xi'}\right\} + \\ & + \sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\lambda_j^i(\xi') - \delta_{j,\xi'}^i * p_{\xi'} b(\xi')}{\mu_\xi^i * p_{\xi'} b(\xi')} \left[p_{\xi'} A^j(\xi') - \min\left\{p_{\xi'} A^j(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_j^{\xi'}\right\}\right] \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

con lo cual, dado que $\delta_{j,\xi'}^i * \geq 0$ para todo $(\xi, j) \in D \times J$, se llega a

$$\begin{aligned} q_{\xi,j} \leq & \sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\mu_{\xi'}^i *}{\mu_\xi^i *} \min\left\{p_{\xi'} A^j(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_j^{\xi'}\right\} + \\ & + \sum_{\xi' \in \xi^+} \frac{\lambda_j^i(\xi')}{\mu_\xi^i * p_{\xi'} b(\xi')} \left[p_{\xi'} A^j(\xi') - \min\left\{p_{\xi'} A^j(\xi'), p_{\xi'} Y_{\xi'} C_j^{\xi'}\right\}\right] \quad \forall j \in J. \end{aligned} \quad [14]$$

A partir de [13] y [14], y utilizando [12] nuevamente, se deduce entonces que

$$\sum_{\xi'\in\xi^+}\frac{\mu_{\xi'}^{i}*}{\mu_{\xi}^{i}*}\left(1-K_{\xi'}^{j}\right)p_{\xi'}A^{j}\left(\xi'\right)\geq 0\ \forall j\in J\,. \qquad [15]$$

Nótese que en esta última fórmula $\left(1-K_{\xi'}^{j}\right)$ es la fracción no entregada de los pagos prometidos por el activo *j* en el estado ξ', con lo cual $\left(1-K_{\xi'}^{j}\right)p_{\xi'}A^{j}\left(\xi'\right)$ es el monto del incumplimiento total en el pago de estos rendimientos. De esta manera, [15] indica que, en equilibrio, la valoración personal esperada del monto del incumplimiento en el pago del rendimiento del activo *j* debe ser no-negativo.

En lo que respecta a cómo el agente utiliza la información de precios de los activos, puede verse que en su decisión hace dos comparaciones, una en calidad de comprador y otra como vendedor. Si el agente está considerando comprar un determinado activo la inecuación [13] se cumplirá con igualdad, con lo cual igualará su precio con su valoración esperada[4] de la porción de rendimientos que el activo pagará efectivamente, es decir, contemplando una posible situación de *default*. Nótese que en esta ecuación $p_{\xi'}A^{j}\left(\xi'\right)$ aparece premultiplicado por $K_{\xi'}^{j}$[5].

Por otro lado, en su calidad de vendedor, el precio de venta no deberá ser superior a la suma de su valoración esperada del colateral que indefectiblemente deberá entregar y de su valoración de la penalidad que experimentará por incumplir con el remanente de los pagos de dicho activo.[6] Además, si el vendedor de este activo incumple con los pagos en todo $\xi'\in\xi^+$, la inecuación [14] se convierte en

$$q_{\xi,j}\leq\sum_{\xi'\in\xi^+}\frac{\mu_{\xi'}^{i}*}{\mu_{\xi}^{i}*}p_{\xi'}A^{j}\left(\xi'\right)\ \ \forall j\in J\ \ [16],$$

transformándose en igualdad si el *default* en todo $\xi'\in\xi^+$ es solo parcial.

En síntesis, existe una valoración diferencial del activo por parte del comprador y del vendedor cuando es incumplido en parte, a pesar de que el monto esperado de entrega es conocido en equilibrio por ambas partes; sin embargo, en equilibrio, el precio de venta terminará siendo determinado por el comprador, independientemente de las promesas y valoraciones personales del vendedor.

Por el lado de la compraventa de activos, dado un vector de penalidades $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ y las matrices $\tilde{\mathbf{K}}$ y $\tilde{\mathbf{A}}$, las condiciones [13] y [14] dicen que, en el óptimo, el agente *i*, si

- $q_{\xi,j}\begin{Bmatrix}>\\=\end{Bmatrix}\sum_{\xi'\in\xi^+}\frac{\mu_{\xi'}^{i}}{\mu_{\xi}^{i}*}*\tilde{K}_{\xi'}^{j}p_{\xi'}\tilde{A}^{j}\left(\xi'\right)\equiv\tilde{q}_{\xi,j}^{C}\Rightarrow\theta_{j}^{i}*\begin{Bmatrix}=\\\geq\end{Bmatrix}0\,;$
- $q_{\xi,j}\begin{Bmatrix}<\\=\end{Bmatrix}\sum_{\xi'\in\xi^+}\left(\frac{\mu_{\xi'}^{i}*}{\mu_{\xi}^{i}*}-\frac{\tilde{\lambda}_{j}^{i}\left(\xi'\right)-\delta_{j,\xi'}^{i}*p_{\xi'}b\left(\xi'\right)}{\mu_{\xi}^{i}*p_{\xi'}b\left(\xi'\right)}\right)\min\left\{p_{\xi'}\tilde{A}^{j}\left(\xi'\right),p_{\xi'}Y_{\xi'}C_{j}^{\xi'}\right\}+$

$$+\sum_{\xi'\in\xi^+}\frac{\tilde{\lambda}_{j}^{i}\left(\xi'\right)-\delta_{j,\xi'}^{i}*p_{\xi'}b\left(\xi'\right)}{\mu_{\xi}^{i}*p_{\xi'}b\left(\xi'\right)}p_{\xi'}\tilde{A}^{j}\left(\xi'\right)\equiv\tilde{q}_{\xi,j}^{V}\ \ \Rightarrow\varphi_{j}^{i}*\begin{Bmatrix}=\\\geq\end{Bmatrix}0.$$

[4] Cuando en este contexto hablamos de "esperado" se consideran solamente los diferentes estados de la naturaleza, no el *default* esperado.

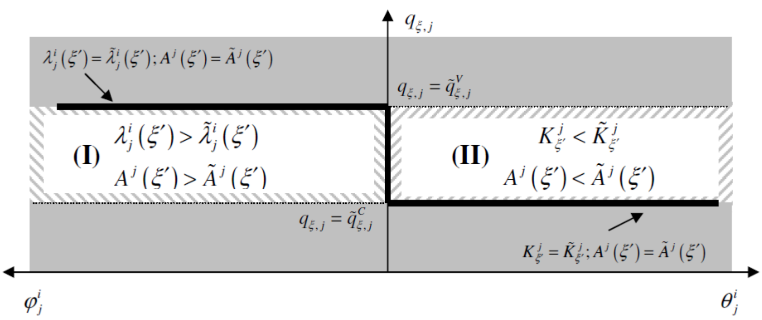
[5] Puede verse que si $K_{\xi'}^{j}=\mathbf{0}$ para todo $\xi'\in\xi^+$, es decir que el repago esperado del activo *j* es nulo, el precio del activo para el comprador debe ser cero porque esa será su valoración personal de los rendimientos de ese activo.

[6] A diferencia de lo ocurrido en [13], la igualdad en [14] sólo puede asegurarse si el agente incumple el activo en todo $\xi'\in\xi^+$.

Sabemos que aquellos precios que se encuentran por encima de $\tilde{q}^V_{\xi,j}$ y por debajo de $\tilde{q}^C_{\xi,j}$ no pueden ser de equilibrio ya que las condiciones [13] y [14] no lo permiten.

El siguiente gráfico permite estudiar la relación existente entre las cantidades comercializadas de un activo *j* y su precio para un vector $\left(x^i*,\Delta^i*,\delta^i*\right)$ dado. Por lo arriba mencionado, los precios superiores a $\tilde{q}^V_{\xi,j}$ e inferiores a $\tilde{q}^C_{\xi,j}$ no pueden ser de equilibrio porque violan las condiciones [13] y [14] del agente *i* (área sombreada). Sólo aquellos puntos contenidos en la línea quebrada de trazo grueso corresponden a niveles comercializados óptimos al precio $\tilde{q}_{\xi,j} \in \left[\tilde{q}^C_{\xi,j},\tilde{q}^V_{\xi,j}\right]$. De esta manera, del gráfico se desprende que si *i* es vendedor $\left(\varphi_j > 0\right)$ no entregará el activo *j* por un precio menor a $\tilde{q}^V_{\xi,j}$ (región I), ya que la penalidad y/o el rendimiento prometido no son lo suficientemente bajos. Por otra parte, si *i* es comprador $\left(\theta_j > 0\right)$, no adquirirá el activo a un precio mayor a $\tilde{q}^C_{\xi,j}$ (región II) ya que el grado de cumplimiento y/o el rendimiento prometido no son lo suficientemente altos.

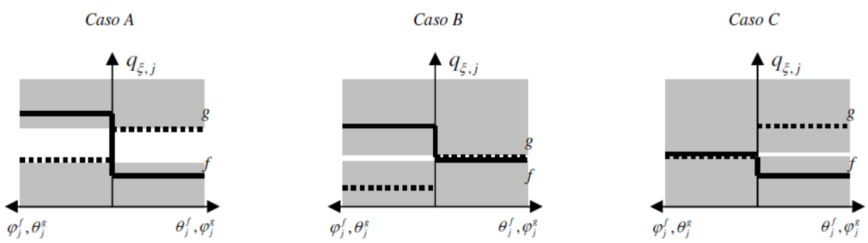
Gráfico 1



Fuente: Elaboración propia.

De la interacción de dos agentes *f* y *g* podemos tener, entre otros, los siguientes casos:

Gráfico 2



Fuente: Elaboración propia.

En el caso A el equilibrio no podrá ser con transacción de activos, ya que el precio que exige *f* para la venta es más alto que el que *g* está dispuesto a pagar mientras que lo que quiere pagar *f* para la compra es muy inferior a lo que *g* está dispuesto a otorgarle. En este caso la penalidad y el rendimiento no son lo suficientemente bajos para uno de los agentes y el pago esperado no es lo suficientemente alto para el otro como para que la transacción se lleve a cabo.

El caso B muestra que si bien el precio exigido por *f* para la venta es superior al que *g* estaría dispuesto a pagarle por el activo, no ocurrirá lo mismo si el que quiere comprar es *f* y *g* el que quiere vender. De esta manera, como para *f* el precio se encuentra acorde con el grado de cumplimiento y el pago prometido por el activo, mientras que para *g* ocurre lo mismo tanto con la penalidad como con el compromiso asumido, la transacción se realiza. El caso C es similar, sólo que los roles de *f* y *g* están intercambiados.

3. ECONOMÍAS PS CON DOS TIPOS HOMOGÉNEOS DE AGENTES

En este apartado supondremos que los agentes pueden clasificarse en dos tipos homogéneos, con lo cual podrán ser representados mediante un agente I o un agente II, dependiendo del grupo al cual pertenezcan. En este sentido analizaremos qué ocurre en equilibrio cuando uno de ellos le vende un activo al otro.

Nos concentraremos en la relación existente entre grado de cumplimiento de un activo, penalidad y consumos (positivos) de equilibrios de los agentes. En este sentido, supongamos que en ξ el agente *k* le vende a *h* un activo de Arrow *j'* con pago prometido positivo en el estado $\overline{\xi} \in \xi^+$. Por el lado del agente *h* (comprador) de las condiciones [10] y [12] se sigue

- $\theta^h_{j'} > 0 \Rightarrow \mu^h_{\overline{\xi}} * K^{j'}_{\overline{\xi}} p_{\overline{\xi}} A^{j'}\left(\overline{\xi}\right) = \mu^h_{\xi} * q_{\xi,j}$ [17]
- $\Delta^i_{j'}\left(\overline{\xi}\right) = 0$ (porque $\varphi^h_{j'} = 0$) $\Rightarrow \mu^h_{\overline{\xi}} * \geq \dfrac{\lambda^h_{j'}\left(\overline{\xi}\right)}{p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)} + \left(\eta^h_{j',\overline{\xi}} * - \delta^h_{j',\overline{\xi}} *\right)$ [18]

En lo que respecta al agente *k* (vendedor), a partir de las condiciones [11] y [9] tenemos

- $\varphi^k_{j'} > 0 \Rightarrow \eta^k_{j',\overline{\xi}} * \min\left\{p_{\overline{\xi}} A^{j'}\left(\overline{\xi}\right), p_{\overline{\xi}} Y_{\overline{\xi}} C^{\overline{\xi}}_{j'}\right\} +$

$$+\left(\frac{\left(\lambda^k_{j'}\left(\overline{\xi}\right)\right)}{p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)} - \delta^k_{j',\overline{\xi}} *\right) p_{\overline{\xi}} A^{j'}\left(\overline{\xi}\right) = \mu^k_{\xi} * q_{\xi,j} \quad [19]$$

y dependiendo de su posición frente al pago en $\overline{\xi}$, sabemos que en el óptimo si *k* hace *default* parcial $\mu^k_{\overline{\xi}} * = \lambda^k_{j'}\left(\overline{\xi}\right) / p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)$, mientras que si cumple con lo prometido o hace default total $\mu^k_{\overline{\xi}} * \geq \lambda^k_{j'}\left(\overline{\xi}\right) / p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)$.

Independientemente de la actitud de *k*, de la igualación de las ecuaciones [17] y [19] siempre se deriva

$$\frac{\mu^h_{\overline{\xi}} *}{\mu^h_{\xi} *} K^{j'}_{\overline{\xi}} p_{\overline{\xi}} A^{j'}\left(\overline{\xi}\right) = \frac{\eta^k_{j',\overline{\xi}} * \min\left\{p_{\overline{\xi}} A^{j'}\left(\overline{\xi}\right), p_{\overline{\xi}} Y_{\overline{\xi}} C^{\overline{\xi}}_{j'}\right\}}{\mu^k_{\xi} *} + \left(\frac{\left(\lambda^k_{j'}\left(\overline{\xi}\right)\right)}{p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)} - \delta^k_{j',\overline{\xi}} *\right) \frac{p_{\overline{\xi}} A^{j'}\left(\overline{\xi}\right)}{\mu^k_{\xi} *} \quad [20]$$

Dependiendo del grado de cumplimiento del activo, tendremos lo siguiente:

a) Si el activo *j'* es incumplido parcialmente, pero no totalmente, en el estado $\overline{\xi}$, sabemos que $0 < K^{j'}_{\overline{\xi}} < 1$, con lo cual a partir de [20] y recordando que $\mu^k_{\overline{\xi}} * = \lambda^k_{j'}\left(\overline{\xi}\right) / p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)$, $\eta^k_{j',\overline{\xi}} * = 0$ y $\delta^k_{j',\overline{\xi}} * = 0$ se deduce que en equilibrio

$$K^{j'}_{\overline{\xi}} = \frac{\mu^k_{\overline{\xi}} *}{\mu^k_{\xi} *} \frac{\mu^h_{\xi} *}{\mu^h_{\overline{\xi}} *} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu^k_{\overline{\xi}} *}{\mu^k_{\xi} *} < \frac{\mu^h_{\overline{\xi}} *}{\mu^h_{\xi} *} \quad [21]$$

con lo cual en equilibrio deberá verificarse:

$$\left(\frac{\lambda^k_{j'}\left(\overline{\xi}\right)}{p_{\overline{\xi}} b\left(\overline{\xi}\right)}\right)^{DP} = \frac{\mu^h_{\overline{\xi}} *}{\mu^h_{\xi} *} \mu^k_{\xi} * K^{j'}_{\overline{\xi}} \quad [22]$$

Nótese que, dada la concavidad de las funciones de utilidad de *k* y *h*, la ecuación [22] indica la existencia de una relación decreciente entre penalidad y consumo para un nivel dado de incumplimiento $K_{\bar{\xi}}^{j'}$.

La ecuación [22] dice además que, en equilibrio, las valoraciones personales de un mayor incumplimiento del activo *j'* en el estado $\bar{\xi}$ deben ser iguales para comprador y vendedor. A tal efecto, teniendo presente que $\left(\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)/p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)\right)^{DP}$ representa la desutilidad marginal del vendedor *k* por hacer *default* de *j'* en el estado $\bar{\xi}$, el lado izquierdo de [22] mide cuánto valora *k* la penalidad por un incumplimiento marginal de *j'* en $\bar{\xi}$ en términos de utilidad marginal de consumo en ξ. Si esta relación fuera menor a la unidad, el agente *k* valoraría más un mayor consumo en ξ que la desutilidad que experimentaría si para financiar dicho consumo incrementara el incumplimiento de *j'* en $\bar{\xi}$. De ocurrir ésto, *k* tendría incentivos a incrementar el grado de *default* en dicho activo para financiar con esos recursos un mayor consumo presente. Por otra parte, si esta relación fuera mayor a 1, *k* tendería a reducir su consumo presente y así utilizar dichos recursos para cumplir en un grado mayor con los pagos de *j'*. De acuerdo a [22] esta relación penalidad-utilidad debe ser igual a la valoración personal del grado de incumplimiento de dicho activo por parte del comprador *h* (lado derecho de la ecuación).

Nótese que como en equilibrio el agente *k* verifica $\mu_{\bar{\xi}}^{k}* = \lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)/p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)$, la ecuación [22] puede escribirse como $\left(\mu_{\bar{\xi}}^{k}*/\mu_{\xi}^{k}*\right) = \left(\mu_{\bar{\xi}}^{h}*/\mu_{\xi}^{h}*\right)K_{\bar{\xi}}^{j'}$, que indica que la relación entre las tasas marginales de sustitución intertemporales en el consumo entre el vendedor *k* y el comprador *h* deben ser iguales al grado de cumplimiento del activo *j'*; dicho de otra manera, la valoración personal esperada del vendedor de lo que promete pagar por la venta de *j** debe ser igual a la valoración personal de lo que el comprador espera recibir por parte de *k* como pago de dicho activo.

b) Si no existe *default* en el estado $\bar{\xi}$, al ser *k* el único emisor del activo se verifica $K_{\bar{\xi}}^{j'} = 1$ y $\eta_{j',\bar{\xi}}^{k}* = 0$, con lo cual recordando que $\mu_{\bar{\xi}}^{k}* = \left(\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)/p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)\right) - \delta_{j',\bar{\xi}}^{k}*$ tenemos que

$$\frac{\mu_{\bar{\xi}}^{h}*}{\mu_{\xi}^{h}*} = \frac{\mu_{\bar{\xi}}^{k}*}{\mu_{\xi}^{k}*} \qquad [23]$$

con lo cual en equilibrio se cumple:

$$\left(\frac{\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)}{p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)}\right)^{ND} = \left(\frac{\mu_{\bar{\xi}}^{h}*}{\mu_{\xi}^{h}*}\mu_{\xi}^{k}* + \delta_{j',\bar{\xi}}^{k}*\right) > \frac{\mu_{\bar{\xi}}^{h}*}{\mu_{\xi}^{h}*}\mu_{\xi}^{k}*\hat{K}_{\bar{\xi}}^{j'} = \left(\frac{\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)}{p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)}\right)^{DP} \qquad [24]$$

para todo $0 < \hat{K}_{\bar{\xi}}^{j'} < 1$. De esta manera, la expresión [24] indica que para niveles de consumo similares a los del caso a), la penalidad $\left(\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)/p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)\right)^{DP}$ no resultaría suficiente para la inexistencia de *default* en el activo *j'* bajo el estado $\bar{\xi}$. De hecho, a los niveles de penalidad $\left(\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)/p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)\right)^{DP}$, el vendedor *k* siempre tendrá incentivos a incrementar su consumo financiándose con un mayor incumplimiento en *j'*.

c) Si *k*, único emisor de *j'* y hace *default* total en $\bar{\xi}$, entonces $K_{\bar{\xi}}^{j'} = \dfrac{p_{\bar{\xi}}Y_{\bar{\xi}}C_{j'}^{\bar{\xi}}}{p_{\bar{\xi}}A^{j'}\left(\bar{\xi}\right)} \in [0,1]$, $\delta_{j',\bar{\xi}}^{k}* = 0$ y $\mu_{\bar{\xi}}^{k}* = \lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)/p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right) + \eta_{j',\bar{\xi}}^{k}*$, con lo cual se sigue:

$$\frac{\mu_{\bar{\xi}}^{h}*}{\mu_{\xi}^{h}*} > \frac{\mu_{\bar{\xi}}^{k}*}{\mu_{\xi}^{k}*} \qquad [25]$$

y se deduce que necesariamente debe darse para todo $\hat{K}_{\bar{\xi}}^{j'} > K_{\bar{\xi}}^{j'}$

$$\left(\frac{\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)}{p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)}\right)^{DP} = \frac{\mu_{\bar{\xi}}^{h}*}{\mu_{\xi}^{h}*}\mu_{\xi}^{k}*\hat{K}_{\bar{\xi}}^{j'} > \mu_{\bar{\xi}}^{k}*K_{\bar{\xi}}^{j'} > \left(\frac{\lambda_{j'}^{k}\left(\bar{\xi}\right)}{p_{\bar{\xi}}b\left(\bar{\xi}\right)}\right)^{DT} K_{\bar{\xi}}^{j'}, \qquad [26]$$

con lo cual la tasa de penalidad compatible con una situación de *default* total será mayor, menor o igual a la correspondiente a *default* parcial dependiendo del valor del colateral.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos estudiado algunas propiedades del equilibrio en una economía PS de infinitos períodos con mercados incompletos y existencia de colateral fijo en el cual el *default* se encuentra permitido.

La caracterización propuesta del equilibrio puso en evidencia de qué manera un agente decide su participación en el mercado de crédito. En este sentido, observamos que en calidad de comprador comparará el precio de mercado con su valoración personal esperada del total de rendimientos efectivos del activo. Por otra parte, en su calidad de vendedor, solamente considerará lo que el activo promete, independientemente de que cumpla o no con sus pagos.

Luego nos hemos concentrado en el intercambio de activos, destacando la relación existente en equilibrio entre grados de penalidad, percepción de cumplimiento, rendimientos prometidos y posición final en un activo específico. En primer lugar, si los activos de la economía tienen penalidades diferentes en un estado determinado, la cantidad máxima de activos incumplidos parcialmente en equilibrio bajo dicho estado es igual a uno. En este sentido, también se muestra que todos los activos con penalidad menor a éste se incumplen totalmente; el resto, es decir los de penalidad mayor, se cumple. En lo que respecta a los precios de los activos en equilibrio, en caso de existencia de intercambio se igualarán a la valoración personal por parte del comprador de lo que éste espera recibir en concepto de rendimiento a partir de cada uno de ellos, independientemente de sus promesas de pago. Para el comprador, dicho precio resulta ser lo suficientemente bajo como para asumir el riesgo de incumplimiento que la compra de dicho activo implica, mientras que para el vendedor es lo suficientemente alto como para asumir el riesgo de enfrentar una penalidad elevada en el estado malo.

Finalmente discutimos el caso particular de economías con dos tipos homogéneos de agentes, una compradora y otra vendedora de un determinado activo. En este sentido, exploramos cómo se comportará el consumo en un estado en el cual se incumple un activo de Arrow. Se demuestra que, al menos en este caso, tasas de penalidad finitas son compatibles con grados de cumplimiento parcial y total. También hemos podido observar que, en equilibrio, cuando el *default* es parcial, las valoraciones personales del grado de incumplimiento del instrumento en cuestión deben ser iguales tanto para comprador como para el vendedor. De esta manera, la valoración personal esperada de lo que se espera que el activo pague por parte del comprador debe ser igual a la relación entre la desutilidad marginal que experimentaría el vendedor en caso de incumplir marginalmente un activo y su mejora en términos de utilidad producto de un mayor consumo presente.

Bibliografía

Araujo A., M. R. Páscoa, J. P. Torres-Martínez (2002). “Collateral Avoids Ponzi Schemes in Incomplete Markets”, *Econometrica,* Vol. 70, No. 4; 1613-1638.

Dubey, P., J. Geanakoplos (1989). "Liquidity and Bankruptcy with Incomplete Markets: Pure Exchange", *Cowles Foundation, Discussion Paper* Nº 900.

Dubey, P., J. Geanakoplos, M. Shubik (1989). "Default and Efficiency in a General Equilibrium Model with Incomplete Markets", Cowles *Foundation, Discussion Paper* 879R.

Dubey, P., J. Geanakoplos, M. Shubik (2000). "General Equilibrium Model with Incomplete Markets", *Cowles Foundation, Discussion Paper* 1247.

Dubey, P., J. Geanakoplos, M. Shubik (2005). "Default and Punishment in General Equilibrium", *Econometrica*, Vol. 73. No. 1. January 2005; 1-38.

Maldonado, W., J. Orillo (2003). "Persistent Default in OLG Model with Incomplete Markets", XXVI Encontro Brasileiro de Econometria. Sociedade Brasileira de Econometria.

Maldonado, W., J. Orillo (2005). *"Collateral or Utility Penalties?"* Universidade Católica de Brasilia, mimeo.

Orillo, J. (2001a). "Default and Exogenous Collateral in Incomplete Markets with a Continuum of States", *Journal of Mathematical Economics*, 35 (2001); 151-165.

Orillo, J. (2001b). *"Making Promises in Infinite-Horizon Economies with Default".* Universidade Católica de Brasilia. Working Paper.

Páscoa, M.R., A. Seghir (2003). "Default Penalties and Ponzi Schemes in Incomplete Markets". XXV Encontro Brasileiro de Econometria. Porto Seguro, Bahia. Sociedade Brasileira de Econometria.

Páscoa, M.R., A. Seghir (2009). "Harsh Default Penalties Lead to Ponzi Schemes", *Games and Economic Behavior*, Volume 65, Issue 1, January 2009, Pages 270-286. Special Issue in Honor of Martin Shubik.

Rodríguez, Ed. A. (2007): "On the properties of general equilibrium with default in economies with incomplete markets"; Latin American Journal of Economics, Vol. 48, No. 1, pp. 39-64, 2011.

Zame, W. R. (1993). "Efficiency and the Role of Default when Security Markets are Incomplete", *The American Economic Review*, vol. 83, No. 5; 1142-1164.

Zame, W.R., J. Geanakoplos (2000). "Collateral, Default and Market Crashes". Yale University, mimeo.