

UNA REVISIÓN DE UNA PRUEBA TOPOLÓGICA DE LA INFINITUD DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Battocchio, Matías¹

¹Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Económicas, Av. Córdoba 2122- 1120AAQ, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina

matiasbattocchio@economias.uba.ar

Resumen

Recibido: 25-03-2025

Aceptado: 15-06-2025

Palabras clave

Topología

Números Primos

En este trabajo se exponen los conceptos e ilustran con ejemplos los elementos de topología que permiten comprender la demostración topológica de la infinitud de los números primos en Furstenberg (1955).

En primer lugar, se introduce el concepto y la notación a utilizar para definir las progresiones aritméticas. Luego se define una topología sobre los números enteros a partir de usar estas progresiones aritméticas como base de la topología. Seguidamente se analizan algunos aspectos de la topología definida; entre ellos, los conjuntos abiertos y cerrados que la componen, la conexidad, los axiomas de separación, y si es $2^{\circ}N$ y $1^{\circ}N$. Además, se la compara con la topología usual heredada de los números reales y la topología del orden, y se muestra que es más gruesa que éstas.

En la segunda sección se expone la demostración de la infinitud de los números primos, como una aplicación directa de la topología ya definida.

En la tercera sección se estudian propiedades adicionales de la topología, que no son de relevancia para la demostración estudiada, como la compacidad, la regularidad y la metrizableidad. Se concluye demostrando que la topología admite una métrica.

A REVIEW OF A TOPOLOGICAL PROOF OF THE INFINITUDE OF PRIME NUMBERS

Abstract

Keywords

Topology

Prime numbers

This work presents the concepts and illustrates with examples the elements of the topology that allow comprehension of Furstenberg's (1955) topological proof of the infinitude of prime numbers.

First, the concept and notation to be used to define arithmetic progressions are introduced. Then, a topology on the integers is defined using these arithmetic progressions as the basis of the topology. Next, some aspects of the defined topology are analyzed; among them, the open and closed sets that comprise it, connectedness, the separation axioms, and whether it is T_2 and T_1 . Additionally, it is compared with the usual topology inherited from the real numbers and the order topology, and it is shown to be coarser than these.

In the second section, the proof of the infinitude of prime numbers is presented as a direct application of the topology already defined.

In the third section, additional properties of the topology are studied, such as compactness, regularity, and metrizability. The work concludes by demonstrating that the topology admits a metric.

UNA TOPOLOGÍA SOBRE LOS NÚMEROS ENTEROS¹

Vamos a dotar al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ de una topología a partir de progresiones aritméticas. En primer lugar, podemos proponer que el conjunto de todas las progresiones aritméticas genera una topología en $\mathbb{Z}$. Para cada $a \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$

$$a + k\mathbb{Z} := \{a + kn : n \in \mathbb{Z}\} \quad (1)$$

Así definidas, las progresiones aritméticas se extienden indefinidamente en ambas direcciones.

Por ejemplo, la sucesión $4 + 2\mathbb{Z}$

..., -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, ...

Algo interesante para notar a esta altura es que no hay una representación única de las progresiones aritméticas a partir de (1). O dicho de otra forma, la misma progresión aritmética puede denotarse con (1) de distintas maneras. Por ejemplo, la progresión $4 + 2\mathbb{Z}$ es igual a $-2 + 2\mathbb{Z}$.

Primero vamos a definir el concepto de topología y de conjuntos abiertos (Munkres, 2013).

Definición 1.1. Una topología sobre X es una colección T de subconjuntos de X que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X están en T .
2. La unión de los elementos de cualquier subconjunto de T pertenece a T .
3. La intersección de los elementos de cualquier subconjunto finito de T pertenece a T .

A un conjunto X al que se le ha especificado una topología se denomina un espacio topológico.

Definición 1.2. Si X es un espacio topológico con una topología T , decimos que un subconjunto U de X es un conjunto abierto de X si U pertenece a T .

Con estas definiciones podemos afirmar que un espacio topológico es un conjunto X junto con una familia de subconjuntos de X , llamadas conjuntos abiertos, tal que el conjunto vacío y X son abiertos, y tal que la unión arbitraria e intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Como primer ejercicio de procesamiento didáctico del concepto de topología, vamos a ver si la familia de progresiones aritméticas, que es un subconjunto de $\mathbb{Z}$, es una topología. La respuesta

¹ El autor agradece las discusiones con Eduardo Rodríguez, y los comentarios y correcciones de un referí anónimo. Cualquier error u omisión es de exclusiva responsabilidad del autor.

(atención *spoiler*) es que no; pero lo interesante es hacer el ejercicio y ver por qué. Para que las progresiones aritméticas sean una topología de los números enteros, se deben cumplir las siguientes tres condiciones enunciadas más arriba:

1. la familia de todas las progresiones aritméticas contenga a $\mathbb{Z}$ y a $\emptyset$;
2. la unión arbitraria de progresiones aritméticas sea una progresión aritmética, y
3. la intersección de finitas progresiones aritméticas sea una progresión aritmética.

La primera condición se cumple ya que $0 + 1\mathbb{Z}$ contiene a $\mathbb{Z}$. Por otro lado, podemos adicionar al $\emptyset$ al conjunto de progresiones aritméticas para constituir una topología.

La tercera condición también se cumple, pero la segunda condición no. La unión de progresiones aritméticas no necesariamente es una progresión aritmética. Un contraejemplo podría ser la unión de $1 + 2\mathbb{Z}$ y $1 + 3\mathbb{Z}$. Esta unión da como resultado la siguiente sucesión

..., -11, -9, -8, -7, -5, -3, -2, -1, 1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 16, 17, ...

que no es una progresión aritmética.

Entonces, la familia de progresiones aritméticas no es una topología de $\mathbb{Z}$, pero sí es una sub-base de una topología ya que la unión de todas ellas es igual a $\mathbb{Z}$. Sabemos que la intersección finita de conjuntos de la sub-base constituye una base de la topología, y que la intersección finita de progresiones aritméticas es una progresión aritmética, por lo tanto, el conjunto de todas las posibles progresiones aritméticas es también una base de la topología.

Podemos razonar esto a partir de la definición de base de una topología. Para que una familia de subconjuntos de $\mathbb{Z}$ sea base tienen que ocurrir dos cosas:

1. Para cada $z \in \mathbb{Z}$, exista al menos un elemento de la base que contenga a z .
2. Si $z \in \mathbb{Z}$ pertenece a la intersección de dos elementos de la base B_1 y B_2 , entonces existe un elemento de la base B_3 que contiene a z tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

La primera condición se cumple ya que podemos tomar como elemento de la base a la progresión $z + 1\mathbb{Z}$.

La segunda condición también se cumple, ilustremoslo con un ejemplo. Consideremos $B_1 = 0 + 2\mathbb{Z}$ y $B_2 = 0 + 5\mathbb{Z}$. La intersección de B_1 y B_2 es la siguiente sucesión

..., -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, ...

pero existe un elemento de la base, que es $0 + 10\mathbb{Z}$, que contiene a esta progresión y está contenida en $B_1 \cap B_2$.

Llamamos τ a la topología generada por el conjunto de todas las progresiones aritméticas en $\mathbb{Z}$. A esta topología se la suele denominar *evenly spaced integer topology* (Steen & Seebach, 1995) porque la base está formada por sucesiones de enteros que están uniformemente espaciados.

Esta topología presenta algunas características que vale la pena mencionar. En primer lugar, los abiertos no vacíos de τ son progresiones aritméticas y la unión de progresiones aritméticas. Como vimos al comienzo de la sección, no basta con la familia de progresiones aritméticas para definir a esta topología, además deben incluirse uniones arbitrarias entre ellas. Por lo tanto, los abiertos contienen infinitos elementos.

Lema 1.1. *Los abiertos no vacíos de $(\mathbb{Z}, \tau)$ son progresiones aritméticas y uniones de progresiones aritméticas.*

Lema 1.2. *Los abiertos no vacíos de $(\mathbb{Z}, \tau)$ son conjuntos con infinitos elementos.*

Formalmente, un subconjunto U no vacío de $\mathbb{Z}$ es abierto si para cada $x \in U$, hay una progresión $x + k\mathbb{Z}$ para algún $k \geq 1$ tal que $x + k\mathbb{Z} \subset U$. El conjunto vacío $\emptyset$ también es abierto. Entonces un conjunto es abierto si todos sus elementos son parte de alguna progresión aritmética que está enteramente contenida en ese conjunto.

En segundo lugar, las progresiones aritméticas son conjuntos cerrados.

Teorema 1.1. *Las progresiones aritméticas son conjuntos cerrados.*

Vamos a generar una construcción que nos permita verificar que todas las progresiones pueden escribirse como complemento de conjuntos abiertos. Las progresiones que tienen $k = 1$ en (1) contienen a $\mathbb{Z}$ y son el complemento de $\emptyset$, que es abierto por definición. Nos queda ver las progresiones que tienen $k > 1$, para ello² vamos a considerar el complemento de la unión de $(k - 1)$ progresiones. Para elegir estas $(k - 1)$ progresiones vamos a calcular el resto de la división de cada elemento de la progresión por k (este cociente es constante para cada progresión aritmética, justamente porque crece aritméticamente). Este resto puede tomar k valores: $0, 1, \dots, (k - 1)$. Las progresiones que hay que tomar son de la forma $a + k\mathbb{Z}$ con k fijo y dado, pero variando a de forma que los restos sean todos distintos entre sí.

² Recordar que k pertenece al conjunto de los números naturales excluido el cero.

Ilustremos esta construcción con un ejemplo. Veamos que el conjunto $\{0 + 5\mathbb{Z}\}$ es igual al complemento de $(\{1 + 5\mathbb{Z}\} \cup \{2 + 5\mathbb{Z}\} \cup \{3 + 5\mathbb{Z}\} \cup \{4 + 5\mathbb{Z}\})$. El resto de la progresión $\{0 + 5\mathbb{Z}\}$ es 0, de $\{1 + 5\mathbb{Z}\}$ es 1, de $\{2 + 5\mathbb{Z}\}$ es 2, y así sucesivamente fueron elegidas.

De esta propiedad inferimos que el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es conexo, ya que hay conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez y no son $\mathbb{Z}$ ni $\emptyset$.

Teorema 1.2. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es conexo.*

Para ver más claramente que el espacio topológico no es conexo, vamos a tomar una progresión aritmética cualquiera $a + b\mathbb{Z}$ y su complemento $\mathbb{Z} - (a + b\mathbb{Z})$. Como las progresiones aritméticas son conjuntos abiertos y cerrados a la vez, estos dos conjuntos son abiertos, disjuntos y su unión es igual a $\mathbb{Z}$, por lo tanto, forman una separación de $\mathbb{Z}$ y entonces, el espacio topológico no es conexo.

En tercer lugar, los conjuntos unitarios o *singletons* (formados por un solo número entero) son conjuntos cerrados. Para demostrar esto consideremos un entero cualquiera $x \in \mathbb{Z}$ y concluyamos que el conjunto formado por ese entero contiene todos sus puntos de acumulación.

Teorema 1.3. *Los conjuntos formados por un solo número entero son conjuntos cerrados.*

Demostración. Supongamos que $y \in \mathbb{Z}$, $y \neq x$ es un punto de acumulación del conjunto

$$\{x\}$$

Entonces, todo abierto que contiene a y debe intersectar al conjunto $\{x\}$ en algún punto que no sea y . Por lo tanto, todo abierto que contiene a y debe contener a x , que es el único punto del conjunto. Pero la progresión $y + (|x - y| + 1)\mathbb{Z}$ contiene a y y no contiene a x . Esto contradice que y es un punto de acumulación de $\{x\}$. Por lo tanto, el conjunto formado por un solo elemento es un conjunto cerrado ■

Hay que recordar que cuando los conjuntos formados por un solo elemento (que en este caso particular son los enteros) son cerrados, la topología cumple el axioma T_1 de separación.

Una cuarta propiedad vinculada a la tercera es que no solo los *singletons* son cerrados, lo que hace que el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ cumpla el axioma T_1 , sino que también se cumple el axioma T_2 o lo que es lo mismo, que el espacio topológico es un espacio de Hausdorff. Para que sea un espacio de Hausdorff, dos elementos cualquiera x e y ($x \neq y$) deben tener algún entorno U_x, U_y que verifique $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Teorema 1.4. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ es un espacio de Hausdorff.*

Para ver que el espacio topológico es un espacio de Hausdorff vamos a elegir $U_x = \{x + k\mathbb{Z}\}$ y $U_y = \{y + k\mathbb{Z}\}$ con un k que no divida a $(y - x)$. De esta forma, U_x y U_y son conjuntos disjuntos que contienen a x e y respectivamente. Por ejemplo, si tenemos $x=2$ e $y=7$, podemos elegir $k=3$ ya que 5 no es divisible por 3. Los conjuntos $U_x = \{2 + 3\mathbb{Z}\}$ y $U_y = \{7 + 3\mathbb{Z}\}$ son abiertos, contienen a x e y , respectivamente, y su intersección es vacía ya que si desarrollamos las progresiones:

$$U_x = \dots, -19, -16, -13, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots$$

$$U_y = \dots, -14, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, \dots$$

vemos que no comparten elementos en común.

En quinto lugar, dado que la base de progresiones aritméticas que empleamos para definir la topología es una base numerable, se cumple el segundo axioma de numerabilidad (decimos que es $2^\circ N$), y el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ es separable.

Teorema 1.5. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ tiene una base numerable, y por lo tanto es $2^\circ N$.*

Demostración. Para probarlo vamos a hacerle un pequeño refinamiento a la base que usamos originalmente. Al inicio de este trabajo remarcamos que una misma progresión aritmética puede escribirse de distintas formas, entonces hay conjuntos de la base que están repetidos. Para evitar esta repetición innecesaria vamos a considerar solo algunos valores de a en (1). Para $k = 1$ solo usaremos $a = 0$; para $k = 2$ usaremos $a = \{0, 1\}$; para $k = 3$, $a = \{0, 1, 2\}$; para $k = 4$, $a = \{0, 1, 2, 3\}$, y así sucesivamente. Esta forma más económica, pero no menos exhaustiva, de expresar la base nos permite enumerar los conjuntos y ponerlos en correspondencia con los naturales ■

Como el espacio topológico es $2^\circ N$, también es $1^\circ N$, ya que lo primero implica lo segundo. Que el espacio topológico sea $1^\circ N$ o cumpla el primer axioma de numerabilidad implica que el sistema de entornos de cada $x \in \mathbb{Z}$ tiene una base numerable.

En sexto lugar, vamos a ver si el espacio topológico es localmente conexo. Ya sabemos por el Teorema 1.2 que no es conexo³, pero esto no implica nada sobre la conexidad local. El espacio topológico es localmente conexo en $x \in \mathbb{Z}$ si para cada entorno de U de x existe un entorno conexo V de x que está contenido en U . Si el espacio es localmente conexo en todos sus puntos, entonces es localmente conexo. Se desprende de la definición que un espacio localmente conexo tiene una base conformada con conjuntos conexos abiertos.

³ A su vez, que no sea conexo implica que tampoco es conexo por caminos ni conexo por arcos.

Teorema 1.6. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es localmente conexo.*

Para entender por qué, vamos a recordar que un elemento típico de la base es una progresión aritmética

$$B = a + k\mathbb{Z}$$

Tenemos que encontrar dos conjuntos abiertos disjuntos cuya unión es igual a B . Para ello vamos a considerar las dos siguientes progresiones aritméticas

$$(a) + 2k\mathbb{Z}$$

$$(a + k) + 2k\mathbb{Z}$$

que son abiertas, disjuntas y su unión es igual a B .

Para ver un ejemplo que muestre que el espacio topológico no es localmente conexo, vamos a considerar la siguiente progresión aritmética $0 + 3\mathbb{Z}$. Esta progresión representa la siguiente sucesión

$$\dots, -21, -18, -15, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots$$

Los dos conjuntos que separan a esta progresión son $0 + 6\mathbb{Z}$ y $3 + 6\mathbb{Z}$, que representan

$$\dots, -18, -12, -6, 0, 6, 12, 18, \dots$$

$$\dots, -21, -15, -9, -3, 3, 9, 15, 21, \dots$$

respectivamente.

Nos quedan ver las propiedades de compacidad y metrizableidad, pero las diferimos unas secciones ya que necesitamos probar que existen infinitos números primos primero.

Un último comentario. Esta topología es distinta de la topología usual de $\mathbb{Z}$, que es la topología usual de $\mathbb{R}$ que $\mathbb{Z}$ hereda por ser un subespacio. En la topología relativa, los conjuntos abiertos son las intersecciones de conjuntos de $\mathbb{Z}$ con los miembros de la topología usual de $\mathbb{R}$. Como cualquier entero $\tilde{x} \in \mathbb{Z}$ puede obtenerse a partir de la intersección con un abierto de esta forma $(\tilde{x}^{-1/2}, \tilde{x}^{1/2})$, la topología usual heredada de los enteros es la topología discreta. Esta topología es estrictamente más fina que la topología generada a partir de la familia de progresiones aritméticas⁴.

⁴ Recordar que la topología discreta es estrictamente más fina que cualquier otra topología.

Otra topología estándar que $\mathbb{Z}$ puede tener es la topología del orden. Si dotamos a $\mathbb{Z}$ de la relación de orden $<$, la base de la topología son los conjuntos de la forma (z_1, z_2) con $z_1 < z_2$. Pero entonces los conjuntos formados por un solo elemento son abiertos, ya que cualquier entero z puede escribirse como $(z-1, z+1)$, que es un elemento de la base, y por lo tanto un conjunto abierto. Por lo tanto, esta topología también coincide con la topología discreta⁵.

La demostración de Furstenberg

Ahora que ya tenemos cierta familiaridad con la topología propuesta por Furstenberg, podemos repasar su demostración⁶ de la infinitud de números primos (Furstenberg, 1955). La demostración consta de un párrafo de menos de media carilla y fue publicada en *The American Mathematical Monthly*.

Teorema 2.1. *Existen infinitos números primos.*

Demostración. La demostración es por contradicción. Vamos a considerar el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ y suponer que existen j números primos: $p_1, p_2, \dots, p_j$. Entonces el conjunto

$$P := \cup_{i=1}^j p_i \mathbb{Z} \quad (2)$$

es cerrado, ya que es la unión finita de progresiones aritméticas como las definidas en (1) pero con $a = 0$ y $k = p_i$, y en esta topología las progresiones aritméticas son conjuntos cerrados (ver Teorema 1.1). Además, sabemos que todos los enteros excepto 1 y -1 tienen al menos un divisor primo. Entonces, $P = \mathbb{Z} \setminus \{1, -1\}$. Pero el conjunto $\{1, -1\}$ no es un conjunto abierto⁷ (ver Lema 1.2), por lo que su complemento no es un conjunto cerrado, lo cual es una contradicción y esta contradicción se debe al supuesto de que existen finitos números primos ■

El andamiaje topológico no es, en rigor, imprescindible. Mercer (2009) reescribió esta misma demostración en términos puramente aritméticos, prescindiendo de la topología, y dejó a la vista que su núcleo es un enunciado sobre progresiones aritméticas. Contrastar ambas versiones ayudar a apreciar qué aporta la mirada topológica: no un argumento nuevo, sino una forma compacta y sugestiva de organizar uno viejo, emparentado con el de Euclides.

Algunas consideraciones más sobre $(\mathbb{Z}, \tau)$

⁵En este caso la topología que $\mathbb{Z}$ hereda de la topología del orden en $\mathbb{R}$ (que coincide con la usual) por ser subespacio es la misma que la que tiene si imponemos ese orden directamente a $\mathbb{Z}$. En ambos casos se tiene la topología discreta. No obstante, esto no es una generalidad y puede ocurrir que la topología del orden, cuando se restringe a un subespacio, sea distinta a la topología de la orden aplicada directamente a ese subespacio.

⁶ Para agregar un dato curioso, esta demostración está planteada como un ejercicio (el 52) en el capítulo 1.3 del libro de Niven et al. (1991).

⁷ El número cero está incluido en P porque cada primo se multiplica por todos los enteros.

La demostración de la infinitud de los números primos solo requiere generar la topología usando como base las progresiones, deducir que las progresiones además de abiertos son cerrados y que los abiertos tienen que tener infinitos elementos. No obstante ello, en la primera sección estudiamos algunas propiedades de la topología para ganar familiaridad, a pesar de que no sean requisito para entender la demostración. En esta sección analizaremos las propiedades de compacidad y metrizabilidad del espacio topológico.

Un espacio topológico es compacto si y solo si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito.

Teorema 3.1. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es compacto.*

Demostración. Consideremos los siguientes conjuntos

$$\Lambda_i = \{p\mathbb{Z} : p_i \text{ es el } i\text{-ésimo número primo}\} \quad (3)$$

La unión de estos conjuntos cubre $\mathbb{Z} \setminus \{1; -1\}$. Para incluir al 1 y al -1 le adicionamos los siguientes abiertos $\{1 + 5\mathbb{Z}\}$ y $\{-1 + 5\mathbb{Z}\}$. Vamos a definir a Λ como la unión de todos los Λ_i y de $\{1 + 5\mathbb{Z}\}$ y $\{-1 + 5\mathbb{Z}\}$ para que sea un cubrimiento de $\mathbb{Z}$. Como Λ es la unión de conjuntos abiertos, también es un conjunto abierto, y por ello un cubrimiento abierto de $\mathbb{Z}$.

Como existen infinitos números primos en las clases 2 y 3 mód 5, cualquier subcolección finita de Λ no puede contener a todos los primos. Por lo tanto, Λ no tiene un subcubrimiento finito y eso demuestra que el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ no es compacto ■

Finalmente, vamos a ver si el espacio topológico es metrizable. Dado el espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$, decimos que es metrizable si es posible definir una métrica tal que la topología métrica generada coincide con τ .

Para comprobar esta propiedad usaremos el Teorema de metrización de Urysohn (Munkres, 2013). Este teorema afirma que si el espacio $(\mathbb{Z}, \tau)$ es 2^N , Hausdorff y regular, entonces es metrizable. Ya sabemos que el espacio topológico es 2^N y Hausdorff (ver Teoremas 1.5 y 1.4, respectivamente), por lo que nos resta ver si es regular.

Los espacios regulares son aquellos en los que para cualquier punto x y conjunto cerrado B que no contiene a x , existen dos conjuntos abiertos disjuntos que contengan a x y a B . La condición de regularidad hace referencia a los axiomas de separabilidad⁸.

⁸ En todo espacio que se cumple T_1 , la condición de regularidad implica Hausdorff. Cuando se cumplen T_1 y regularidad, decimos que se verifica el axioma T_3 .

Teorema 3.2. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ es regular.*

Demostración. Como x no pertenece a B , $x \in \mathbb{Z} - B$. Pero como B es cerrado, $\mathbb{Z} - B$ es abierto y puede escribirse como la unión de elementos de la base. En concreto, tiene que existir algún elemento de la base B_x tal que $x \in B_x \subset \mathbb{Z} - B$. B_x es un abierto que contiene a x y que es disjunto de B , pero también es cerrado por (1.1) porque es una progresión aritmética. Entonces $\mathbb{Z} - B_x$ es un abierto que no contiene a x pero sí a B . Esto demuestra que $(\mathbb{Z}, \tau)$ es regular ■

Por el Teorema de metrización de Urysohn (Munkres, 2013) y los Teoremas 1.4, 1.5 y

3.2

Corolario 3.1. *El espacio topológico $(\mathbb{Z}, \tau)$ es metrizable.*

Cierre y conclusiones

A modo de cierre, vale la pena volver sobre lo hecho. La infinitud de los números primos es un resultado conocido desde Euclides, y la demostración de Furstenberg no lo amplía ni lo refina: prueba lo mismo por otro camino. El interés de este trabajo no reside, entonces, en el teorema, sino en el trayecto que conduce a él. Para llegar a una demostración que ocupa media carilla tuvimos que construir una topología sobre $\mathbb{Z}$, decidir qué conjuntos son abiertos, advertir que las progresiones aritméticas son a la vez abiertas y cerradas, y reconocer que sus abiertos no vacíos son necesariamente infinitos. Recién con esas piezas en la mano la demostración se vuelve casi transparente.

Ese recorrido es lo que convierte a este ejemplo en un ejercicio didáctico fértil. En un mismo espacio concreto, y sin salir de los enteros, aparecen y se ponen a prueba buena parte de los conceptos centrales de un primer curso de topología: base y sub-base, conjuntos abiertos y cerrados, conexidad y conexidad local, los axiomas de separación hasta Hausdorff y regularidad, la numerabilidad, la compacidad y la metrizabilidad. Cada una de esas propiedades, que suele presentarse de manera abstracta, adquiere aquí un contenido palpable que se puede calcular y verificar con progresiones aritméticas. El espacio $(\mathbb{Z}, \tau)$ funciona así como un pequeño laboratorio donde las definiciones dejan de ser formales y se vuelven manipulables.

BIBLIOGRAFÍA

- Furstenberg, H. (1955). On the Infinitude of Primes. *The American Mathematical Monthly*, 62(5), 353-353.
- Mercer, I. D. (2009). On Furstenberg's Proof of the Infinitude of Primes. *The American Mathematical Monthly*, 116(4), 355–356.
- Munkres, J. (2013). *Topology: Pearson New International Edition*. Pearson Education Limited.
- Niven, I. & Zuckerman, H. & Montgomery, H. (1991) *An Introduction to the Theory of Numbers*. 5ta edición. John Wiley & Sons.
- Steen, L. & Seebach, J. (1995). *Counterexamples in Topology*. Dover Publications.