

CONSTRUCCION DE SUPERFICIES TOROIDALES MEDIANTE EL ENSAMBLADO CICLICO DE PRISMAS REGULARES Y SU RELACION CON LA CINTA DE MÖBIUS

Rubin, Carlos¹

¹Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. CIMBAGE-IADCOM. Av. Córdoba 2122-
1120AAQ. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina

cxrubin@gmail.com

Resumen

Recibido: 25-03-2026

Aceptado: 15-06-2026

Palabras clave

Topología

Toro

Ensamblado Cíclico

Prisma Regular

Cinta Möbius

En el presente trabajo se estudia una familia de superficies toroidales basada en el ensamblado cíclico de prismas rectos cuya sección transversal es un polígono regular de n lados ($n \geq 3$), previa rotación de un ángulo $2\pi/n$. A pesar de estar compuesta por elementos planos, la construcción presenta continuidad global y topología toroidal. Se demuestra que, en condiciones específicas de identificación y cierre, la estructura resultante, llamada toro prismático, es una superficie homeomorfa al toro convencional, y se constituye en la realización discreta de un toro.

Se realiza una comparación conceptual detallada del toro prismático estudiado con la cinta de Möbius, dado que involucran identificaciones con torsión o rotación y producen una reorganización esencial de la superficie. Asimismo, se demuestra que cualquier semejanza entre ambos es solo visual y que en su esencia son topológicamente diferentes, dado que pertenecen a clases diferentes.

El trabajo muestra que el toro prismático constituye una discretización estructural del toro continuo, preserva los invariantes topológicos fundamentales bajo un esquema de ensamblado geométrico finito y abre la puerta al desarrollo de nuevas familias de superficies discretas.

CONSTRUCTION OF TOROIDAL SURFACES BY CYCLIC ASSEMBLY OF REGULAR PRISMS AND THEIR RELATIONSHIP WITH THE MÖBIUS STRIP

Abstract

Keywords

Topology
Torus
Cyclic Assembly
Regular Prism
Möbius Strip

This paper studies a family of toroidal surfaces based on the cyclic assembly of right prisms whose cross-section is a regular n -sided polygon ($n \geq 3$), after rotation by an angle of $2\pi/n$. Despite being composed of planar elements, the construction exhibits global continuity and toroidal topology. It is shown that, under specific identification and closure conditions, the resulting structure, called a prismatic torus, is a homeomorphic surface to the conventional torus, and constitutes the discrete realization of a torus.

A detailed conceptual comparison is made between the studied prismatic torus and the Möbius strip, given that both involve identifications with torsion or rotation and produce an essential reorganization of the surface. Furthermore, it is shown that any similarity between the two is only visual and that they are essentially topologically different, since they belong to different classes.

The work shows that the prismatic torus constitutes a structural discretization of the continuous torus, preserves the fundamental topological invariants under a finite geometric assembly scheme, and opens the door to the development of new families of discrete surfaces.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las superficies obtenidas mediante identificaciones de estructuras geométricas elementales constituye un eje central en la topología y en la geometría de las superficies. En particular, los procedimientos de pegado o identificación de bordes permiten construir espacios de notable riqueza estructural a partir de objetos simples, revelando propiedades globales que no son evidentes en la configuración original.

En este trabajo se introduce y analiza una clase de superficies, que denominaremos toros prismáticos, construidas a partir de prismas regulares cuyas bases son identificadas mediante una rotación de ángulo $2\pi/n$. Esta operación genera un espacio cociente que, si bien surge de una construcción geométrica discreta, posee propiedades topológicas definidas. El objetivo principal es demostrar que, para todo $n \geq 3$, el espacio resultante de un toro prismático es una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde, homeomorfa al toro convencional T^2 .

En primer lugar, este estudio aporta una construcción alternativa novedosa del toro, basada en objetos poligonales y transformaciones discretas, facilitando su interpretación geométrica y visual. En segundo lugar, esta construcción establece un puente entre la topología clásica de superficies y representaciones más concretas, susceptibles de ser trasladadas al ámbito del diseño, la visualización tridimensional y la escultura.

En este contexto, resulta particularmente relevante comparar el toro prismático con la cinta de Möbius, otra superficie obtenida mediante identificación de bordes, pero que presenta propiedades topológicas radicalmente distintas. Mientras que la cinta de Möbius es una superficie no orientable y posee borde, el toro prismático conserva la orientabilidad y carece de borde, lo que pone de manifiesto el papel determinante que juega la naturaleza de la identificación en la estructura global del espacio.

De este modo, el toro prismático se presenta no solo como un objeto de interés matemático, sino también como una estructura que permite articular de manera natural conceptos topológicos, representaciones geométricas y expresiones artísticas contemporáneas.

1. MARCO TEÓRICO

1.1 Topología algebraica

La topología algebraica estudia los espacios topológicos usando herramientas del álgebra. Traduce problemas geométricos en problemas algebraicos y, en esencia, busca responder preguntas tales como, por ejemplo:

¿Cuándo dos formas son equivalentes desde el punto de vista topológico?

¿Qué propiedades de una forma no cambian, aunque la deformemos sin romperla ni pegarla?

A continuación, se presentan las definiciones de homeomorfismo, homotopía y homología. Las notaciones usadas se muestran, por ejemplo, en Hatcher, A. (2002) *Algebraic Topology*.

1.2 Homeomorfismo ($\cong$)

Dada $f: X \rightarrow Y$ una función entre dos espacios topológicos.

Se dice que los espacios X e Y son homeomorfos si:

- f es biyectiva (uno a uno y sobre)
- f es continua
- Su inversa f^{-1} también es continua

Un homeomorfismo es una equivalencia exacta en topología. Dos espacios son homeomorfos si uno puede transformarse en el otro mediante deformaciones continuas, sin cortar ni pegar. Es el concepto de igualdad topológica, aun cuando sus realizaciones geométricas sean visualmente distintas.

Un ejemplo clásico es la equivalencia topológica entre la superficie de una taza con asa y la superficie de un toro. Si bien, la apariencia geométrica es muy diferente ambos objetos poseen un único agujero y, por lo tanto, ambas superficies son homeomorfas.

Si $X \cong Y$ (homeomorfos), entonces comparten:

- Propiedades topológicas globales
- Número de agujeros
- Conectividad
- Orientabilidad

1.3 Homotopía ($\simeq$)

Sean X, Y espacios topológicos

$f, g: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas

Se dice que f y g son homotópicas si existe una aplicación continua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y \quad (1)$$

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad (2)$$

$$f(X) \simeq g(X) \quad (3)$$

Una homotopía es una deformación continua de funciones. Es como animar f , continuamente, hasta convertirla en g .

Dos espacios son homotópicamente equivalentes si pueden deformarse uno en otro, es un concepto más flexible que el homeomorfismo. Por esta razón, el homeomorfismo implica homotopía, pero no al revés.

1.4 Homología (H_n)

La homología asocia a cada espacio topológico X una familia de grupos abelianos

$$H_n(X), \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$

Estos grupos son los invariantes topológicos, es decir, no cambian bajo homeomorfismos.

La homología mide agujeros en distintas dimensiones:

- $H_0(X)$: componentes conexas
- $H_1(X)$: agujeros tipo “anillo” (como el toro de revolución)
- $H_2(X)$: cavidades (en dimensión superior)

Los grupos de homología detectan lo que no es borde. Un ciclo que no es borde representa un agujero real, porque si lo fuera, sería trivial desde el aspecto topológico.

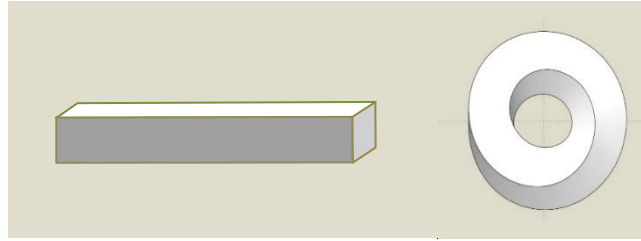
La homología de un espacio topológico X se define como el cociente entre el grupo de ciclos $Z_n(X)$ y el grupo de bordes $B_n(X)$, obteniéndose los grupos abelianos $H_n(X)$, que constituyen los invariantes algebraicos capaces de detectar la estructura global del espacio, en particular la presencia de agujeros en distintas dimensiones.

2. TEOREMA FUNDAMENTAL

2.1 Construcción del modelo (X_n)

El toro prismático es un espacio X_n que se obtiene de identificar las dos bases de un prisma regular P_n de base n -gonal, con $n \geq 3$, mediante una rotación $\varrho = 2\pi/n$. (Figura: 1)

Figura 1: Prisma (P_n) y toro prismático (X_n), para $n = 4$



Consideremos su superficie lateral unida a las dos bases poligonales B_0 y B_1 .

$$\text{Sea } \varrho: B_0 \rightarrow B_1 \quad (4)$$

Definimos el espacio cociente

$$X_n := P_n / \sim \quad (5)$$

2.2 Tesis

El toro prismático X_n es una superficie compacta, conexa, orientable y de género uno. Por lo tanto, es homeomorfo a un toro convencional (T^2).

$$X_n \cong T^2 \quad (6)$$

2.3 Demostración

▪ Compacidad

El prisma P_n es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^3$, pues es cerrado y acotado. La relación de equivalencia que define X_n identifica puntos solamente en las dos bases mediante un homeomorfismo ϱ , por lo cual el cociente

$$q: P_n \rightarrow X_n \quad (7)$$

Como imagen continua de un espacio compacto, X_n es compacto.

▪ Conexidad

El prisma P_n es conexo, de hecho, arcoconexo. La imagen continua de un espacio conexo es conexa, luego

$$X_n = q(P_n) \text{ es conexo} \quad (8)$$

▪ Sin borde

Se debe probar que todo punto de X_n posee un entorno homeomorfo a un disco abierto de $\mathbb{R}^2$.

Para ello distinguimos tres tipos de puntos en el espacio cociente:

a) Puntos provenientes del interior de las caras laterales

Si p pertenece al interior de una cara lateral del prisma, entonces no interviene en la identificación. Un entorno suficientemente pequeño de p en la superficie del prisma es ya homeomorfo a un disco abierto. Su imagen en X_n conserva esta propiedad.

b) Puntos provenientes del interior de las bases

Sea $p \in \text{int}(B_0)$. En la superficie del prisma, un entorno de p dentro de la base es un semidisco y, análogamente, un entorno de $p(p) \in B_l$ es otro semidisco. Al identificar ambos por ϱ , esos dos semidiscos se pegan a lo largo de su diámetro, obteniéndose un disco abierto. Por consiguiente, la clase $[p] \in X_n$ tiene entorno euclídeo tridimensional.

c) Puntos provenientes de los bordes de las bases

Sea $p \in \partial B_0$. Entonces $\varrho(p) \in \partial B_l$. Antes del cociente, alrededor de p y $\varrho(p)$ hay sectores angulares pertenecientes a caras laterales y a las bases. La identificación de ambos bordes mediante ϱ pega exactamente los sectores que quedan “abiertos”, completando un ángulo total de 2π . Por tanto, la clase de equivalencia $[p]$ tiene un entorno homeomorfo a un disco abierto.

Esto incluye en particular los vértices: como la rotación por $2\pi/n$ lleva cada vértice de una base al siguiente vértice de la otra, los sectores incidentes se ensamblan cíclicamente sin producir singularidades cónicas, la suma angular local es 2π , de modo que también allí se obtiene un entorno discoidal.

De los tres casos se concluye que todo punto de X_n admite un entorno homeomorfo a disco abierto. Luego X_n es una superficie topológica 2-dimensional. Además, no aparecen entornos homeomorfos a semidiscos, de modo que no tiene borde.

Por lo antes mencionado, X_n es una superficie topológica sin borde.

▪ Orientabilidad

La superficie lateral del prisma es homeomorfa a $S^1 \times [0, 1]$, es decir, a un cilindro, que es orientable. La identificación entre las dos componentes de borde del cilindro se efectúa mediante la rotación ϱ , que preserva la orientación circular del n -gono base.

Equivalentemente, si parametrizamos la superficie lateral por

$$(\theta, t) \in S^1 \times [0, 1], \quad (9)$$

$$(\theta, 0) \sim (\theta + 2\pi/n, 1). \quad (10)$$

$$h: S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1 \times [0, 1], \quad (11)$$

$$h(0, t) = (0 + 2\pi/n, t). \quad (12)$$

En base a lo anterior, X_n es orientable.

▪ Característica de Euler

Para determinar el género, calculamos $\chi(X_n)$.

Tomemos la descomposición natural del prisma.

n caras laterales

2 caras n -gonales

Tras la identificación de las bases por la rotación ϱ , las dos bases pasan a constituir una única 2-celda, mientras que las n caras laterales permanecen como 2-celdas.

Así, el número total de celdas es:

$$F = n + 1 \quad (13)$$

Contamos las 1-celdas.

Las n aristas verticales del prisma sobreviven como 1-celdas.

Las n aristas de B_0 se identifican con las n aristas de B_1 por la rotación, con lo cual se producen n 1-celdas adicionales.

Entonces,

$$E = 2n \quad (14)$$

Finalmente, contemos los vértices. El prisma tiene $2n$ vértices, n en cada base. La identificación por rotación hace que cada vértice de B_0 se identifique con un vértice de B_1 , de modo que quedan,

$$V = n \quad (15)$$

$$\chi(X_n) = V - E + F \quad (16)$$

La manera correcta de obtener la característica de Euler del espacio cociente cerrado consiste en trabajar con la superficie lateral como cilindro y pegar sus dos componentes de borde. El cilindro tiene:

$$\chi(S^1 \times [0,1]) = 0 \quad (17)$$

$$\chi(X_n) = 0 \quad (18)$$

También puede verificarse mediante una descomposición celular simplificada con:

una 0-celda ($V = 1$)

dos 1-celdas fundamentales ($E = 2$)

una 2-celda ($F = 2$)

reemplazando:

$$\chi(X_n) = V - E + F = 1 - 2 + 1 = 0 \quad (19)$$

$$\chi(X_n) = 0 \quad (20)$$

- Determinación del género

Ya sabemos que X_n es una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde. Para una superficie orientable cerrada de género g , la característica de Euler satisface

$$\chi(X_n) = 2 - 2g \quad (21)$$

$$0 = 2 - 2g \quad (22)$$

$$g = 1 \quad (23)$$

X_n tiene género 1

- Clasificación de superficies

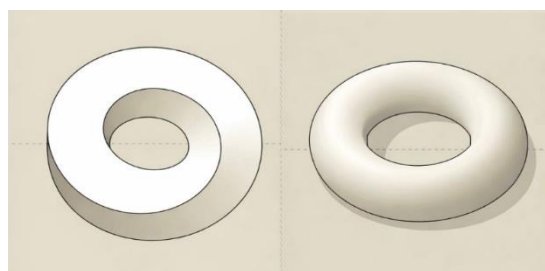
Por el teorema de clasificación de superficies compactas conexas orientables, la superficie X_n al ser compacta, conexa, orientable y de género uno, es homeomorfa al toro de revolución.

$$T^2 = S^1 \times S^1 \quad (24)$$

$$X_n \cong T^2 \quad (\text{relación de homeomorfismo}) \quad (25)$$

$$H_1(X_n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \quad (\text{relación de homología}) \quad (26)$$

Figura 2: Toro prismático (X_n) y toro de revolución (T^2)



Fuente: Elaboración propia

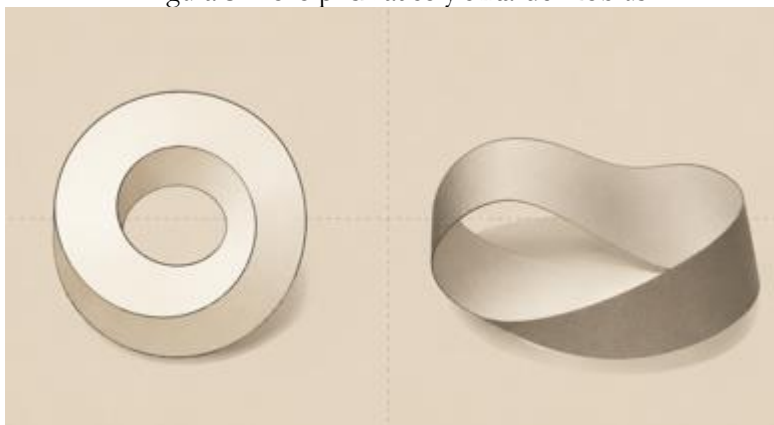
Por lo tanto, el modelo de estudio es homeomorfo a un toro de revolución y por esta razón esta construcción se ha dado en llamar toro prismático (Ver Fig. 2).

El homeomorfismo entre X_n y el toro T^2 implica inmediatamente su equivalencia homotópica, garantizando la coincidencia de sus invariantes algebraicos. En particular, ambos espacios comparten el mismo grupo fundamental y grupos de homología.

3. COMPARACIÓN CON MÖBIUS

La construcción del toro prismático presenta, en una primera lectura geométrica, cierta afinidad conceptual con la cinta de Möbius (Ver Fig. 3), ya que en ambos casos interviene una identificación de bordes mediante una rotación o torsión. Sin embargo, desde el punto de vista topológico, ambos objetos difieren de manera esencial. A continuación, se analizan, en forma comparativa, las propiedades de compacidad, conexión, orientabilidad y tipo topológico de cada uno de ellos.

Figura 3: Toro prismático y cinta de Möbius



Fuente: Elaboración propia

- La cinta de Möbius

La cinta de Möbius puede definirse como el espacio cociente obtenido a partir del rectángulo

$[0, 1] \times [0, 1]$ mediante la identificación

$$(0, y) \sim (1, 1 - y), \quad y \in [0, 1] \quad (27)$$

Esta identificación introduce una inversión de orientación: al recorrer una vuelta completa sobre la banda, la orientación transversal se invierte. Por lo tanto, la cinta de Möbius constituye un ejemplo elemental de superficie no orientable.

Además, la cinta de Möbius posee borde no vacío. En efecto, el borde del rectángulo original no desaparece completamente bajo la identificación: las aristas horizontales sobreviven y dan lugar a una única componente de borde. Por lo tanto, la cinta de Möbius no es una superficie cerrada.

- El toro prismático (X_n)

A diferencia de la cinta de Möbius, esta identificación no invierte la orientación local, sino que preserva la estructura cíclica de la base poligonal. Por ello, el espacio resultante es orientable. Asimismo, al pegarse completamente ambas bases, desaparecen los bordes asociados a ellas, y la superficie obtenida resulta cerrada. Bajo las hipótesis de regularidad de la construcción, X_n es una

superficie compacta, conexa, orientable y de género uno; en consecuencia, es homeomorfa con el toro T^2 , como se demostró en la sección anterior.

- Conexión

El rectángulo es conexo, y su cociente por identificación de lados sigue siendo conexo; de allí que la cinta de Möbius sea conexa. Análogamente, el prisma regular P_n es conexo, y la identificación de sus bases no rompe esa propiedad. En consecuencia, el toro prismático también es conexo. Por lo tanto, ambos espacios son conexos.

- Orientabilidad

La cinta de Möbius es no orientable, ya que la identificación

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \quad (28)$$

Invierte la orientación transversal. Intuitivamente, al transportar un vector normal a lo largo de una vuelta completa sobre la banda, éste regresa invertido.

En el toro prismático la identificación entre las bases está dada por una rotación

$$(0, x) \sim (1, R_n(x)),$$

que preserva la orientación. En consecuencia, el toro prismático es orientable.

Por lo tanto, la cinta de Möbius no es orientable, mientras que el toro prismático sí lo es.

- Presencia de borde

La cinta de Möbius posee una única componente de borde, por lo que no es una superficie cerrada. El toro prismático, en cambio, al identificar completamente las bases y cerrar lateralmente la construcción, no presenta borde.

$$\partial(\text{cinta de Möbius}) \neq \emptyset, \quad \partial X_n = \emptyset \quad (29)$$

Por lo tanto, la cinta de Möbius tiene borde y el toro prismático no.

- Tipo topológico global

La cinta de Möbius no puede ser homeomorfa al toro prismático por las diferencias que se mencionan a continuación, las cuales son los invariantes topológicos y excluyen cualquier homeomorfismo entre ambos espacios.

- la cinta tiene borde y el toro no

- la cinta es no orientable y el toro sí
- la cinta no es una superficie cerrada y el toro sí

En cambio, el toro prismático, al ser compacto, conexo, orientable y sin borde, y tener género uno, pertenece a la misma clase topológica que el toro convencional T^2 .

$$X_n \cong T^2 \quad (30)$$

▪ Observaciones finales

La comparación muestra que la relación entre el toro prismático y la cinta de Möbius es solamente analógica y constructiva, pero no topológica. Ambos objetos comparten la idea de obtener una superficie mediante identificación de partes de una figura más simple, pero la naturaleza de la identificación es esencialmente distinta.

En la cinta de Möbius la torsión introduce una inversión de orientación, generando una superficie no orientable con borde. En el toro prismático, la identificación mediante rotación preserva la orientación y conduce a una superficie cerrada orientable de género uno. Por ello, el toro prismático no puede considerarse una “cinta de Möbius engrosada” ni una variante topológica de ella.

Más precisamente, puede afirmarse que la cinta de Möbius y el toro prismático pertenecen a clases topológicas diferentes: la primera es una superficie no orientable y con borde; el segundo es una superficie orientable, sin borde y homeomorfa al toro usual.

El modelo propuesto no solo aporta una interpretación alternativa desde una perspectiva discreta, sino que también abre posibilidades en visualización matemática, instalaciones urbanas (Figura: 4), esculturas metálicas, arte geométrico, diseño escultórico, educación en topología y arquitectura paramétrica.

Figura 4: Toro prismático como instalación urbana



Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIÓN

El toro prismático constituye una discretización estructural del toro continuo, preservando invariantes topológicos fundamentales bajo un esquema de ensamblado geométrico finito.

El análisis evidencia que la naturaleza de la identificación – rotacional en este caso – es determinante en la preservación de la orientabilidad, en contraste con la cinta de Möbius, donde una identificación con inversión genera una estructura no orientable.

Finalmente, esta construcción sugiere líneas futuras de investigación en torno a superficies de mayor complejidad, obtenidas mediante identificaciones más generales, variando el ángulo de rotación, usando polígonos no regulares, introduciendo torsiones múltiples. Esto abre la puerta a nuevas familias de superficies discretas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Adams, J. F. (1972). *Algebraic Topology: a Student's Guide*, Cambridge Univ. Press.
- Adams, J. F. (1974). *Stable Homotopy and Generalised Homology*, Univ. of Chicago Press.
- Aguilar, M. Gitler S. y Prieto C. (2002). *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer-Verlag.
- Armstrong, M. (1983). *Basic Topology*. Springer.
- Baues, H. J. (1996). *Homotopy Type and Homology*, Oxford Univ. Press.
- Bredon, G. E. (1993). *Topology and Geometry*, Springer-Verlag.
- Coxeter, H.S.M. (1973). *Regular Polytopes*. Dover.
- Dieck, T. T. (2008). *Algebraic Topology*, E.M.S.
- Dold, A. (1980). *Lectures on Algebraic Topology*, Springer-Verlag.
- Fulton, W. (1995). *Algebraic Topology: A First Course*, Springer-Verlag.
- Grünbaum, B. (2003). *Convex Polytopes*. Springer.
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic Topology*. <http://www.math.cornell.edu/~hatcher>.
- Maunder, C. R. F. (1980). *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press.
- Munkres, J. (2000). *Topology*. Prentice Hall.
- Selick, P. (1997). *Introduction to Homotopy Theory*, Fields Institute Monographs 9, A.M.S.
- Thurston, W. (1997). *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton.
- Weeks, J. (1987). *The Shape of Space*. CRC Press