

**PRIMER SEMINARIO NACIONAL
DE
INVESTIGACIÓN EN
MODELOS FINANCIEROS**

2007

INDICE

¿Me quedo en capitalización, o me paso a reparto?

Dieulefait, Enrique Pág. 3

Modelización de series financieras

Fabris, Julio Eduardo Pág. 37

Dinámica caótica en mercados financieros

Garnica Hervas, Juan Ramón; Caniggia, Adriana, O. Thomasz,
Esteban; Garófalo Paula Pág. 73

***Acerca de las representaciones bidimensionales estáticas
con distribuciones elípticas y no elípticas en las
aplicaciones biométricas y financieras***

Landro, Alberto; González Mirta Pág. 99

Costo financiero implícito en la financiación

Metelli, María Alejandra Pág. 123

Finanzas sobre una base económica caótica

Tapia, Gustavo Pág. 135

¿ME QUEDO EN CAPITALIZACIÓN, O ME PASO A REPARTO?

Enrique Dieulefait

MODELO FINANCIERO PARA LA ESTIMACIÓN DEL AHORRO CAPITALIZADO

El 12 de Abril de 2007 entró en vigencia la Ley que permite al Afiliado al Sistema Integrado de Jubilaciones y Pensiones la libre opción entre los regímenes de Capitalización y Reparto, poniendo fin a una restricción sancionada por Ley en la década del 90.

Al 13 de Julio pasado, aunque el plazo para optar se extiende hasta el 31 de Diciembre del corriente año, 780.656 afiliados al Sistema Previsional de Capitalización ejercieron su voluntad de optar por el Sistema Público de Reparto.

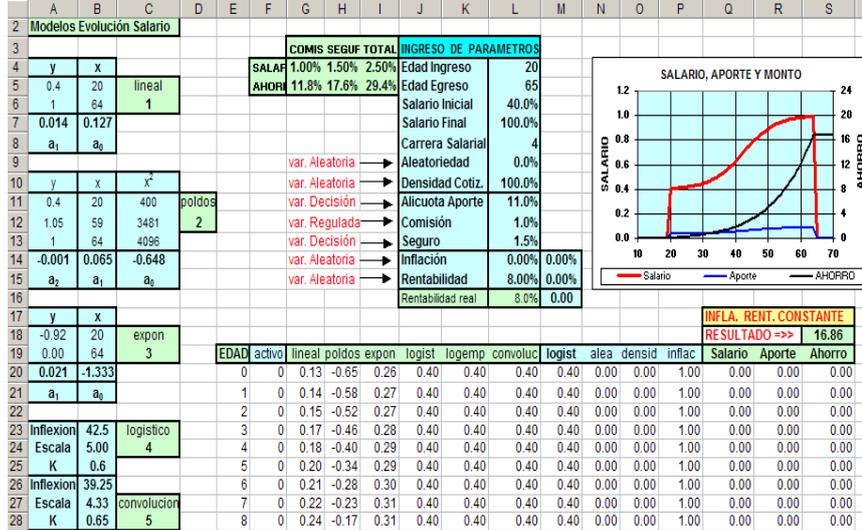
Este estudio analiza este hecho a la luz de un modelo financiero que estima el Monto del Ahorro Acumulado por un afiliado al Sistema Previsional de Capitalización.

La estimación del monto del ahorro acumulado en la cuenta personal del afiliado al Sistema Previsional de Capitalización es el punto de partida para una decisión racional, ya que es a partir de

este valor, que los procedimientos de cálculo actuarial determinan el importe de las correspondientes anualidades de renta vitalicia. Para estimar el monto del ahorro acumulado en la cuenta personal del afiliado, se desarrolla un modelo financiero en el que conviven parámetros, variables de decisión y variables aleatorias.

Este modelo financiero tiene en cuenta, entre otros elementos:

1. Edad del afiliado al ingresar al Sistema de Capitalización
2. Edad del afiliado al egresar del Sistema de Capitalización
3. Salario Inicial
4. Salario Final
5. Carrera Salarial
6. Aleatoriedad en los Ingresos
7. Densidad de Cotización
8. Alícuota de Aportes
9. Comisión
10. Costo del Seguro de Invalidez y Muerte
11. Tasa de Inflación
12. Tasa de Rentabilidad de las inversiones



La planilla de Excel que soporta el modelo presenta la siguiente estructura:

En ella se observa, en el correspondiente Cuadro de Ingreso de Parámetros, los valores asignados en el modelo.

Los dos primeros parámetros: Edad de Ingreso y Edad de Egreso, se explican por sí mismos. El Salario Inicial se expresa como un porcentaje del Salario Final al que se le asigna un valor unitario.

El siguiente parámetro identifica la Carrera Salarial, entendiéndose por tal la traza del salario, desde el inicio hasta el fin del período de actividad. En las primeras tres columnas de la planilla se pueden observar los procedimientos de cálculo de los parámetros de los respectivos modelos: lineal, polinomial, exponencial, logístico o por medio de una función de convolución.

El siguiente parámetro incorpora la magnitud de una perturbación aleatoria en la carrera salarial, por medio de oscilaciones alrededor de los valores descritos por la carrera salarial.

La Densidad de Cotización permite al modelo captar, por medio de su valor numérico, una medida de la regularidad de los aportes efectivamente ingresados al sistema.

La importancia de este parámetro se percibe en su verdadera magnitud al considerar la evidencia que proporciona al respecto la Superintendencia de Administradoras de Fondos de Jubilaciones y Pensiones.



Este Cuadro muestra con claridad que sólo un pequeño porcentaje de los afiliados al Sistema de Capitalización registra una densidad de cotización perfecta.

El comportamiento de esta variable puede resultar extraño, ya que se aparta en forma notable de las distribuciones campanulares, más o menos simétricas, habituales en el análisis estadístico elemental.

En lo que sigue de esta exposición, la densidad de cotización será una variable de decisión, cuyo valor refleja el perfil del afiliado para el que se busca estimar el monto del Ahorro. En los ejemplos numéricos que se acompañan, se considera una densidad de cotización del 100%

El siguiente parámetro, identificado como Alícuota de Aporte, corresponde a una variable de decisión. En los 14 años que lleva el SIJP, este parámetro, que inicialmente se estableció como un 11% del salario, sufrió varias modificaciones.

En Noviembre de 2001, cuando la Crisis, se lo redujo al 5% del salario, lo que impactó negativamente en la financiación de todo el sistema previsional, tanto en sus alternativas de Capitalización como de Reparto. Con posterioridad, a cada sistema se le asignó una alícuota distinta.

Actualmente el Sistema de Reparto tiene una alícuota de aporte del 11% del Salario y el Sistema de Capitalización una del 7%. Se prevé, para Enero de 2008, restituir esta última a su valor inicial del 11%.

El valor numérico de la Alícuota de Aporte incide sobre los resultados de todo sistema previsional, tanto de Reparto como de Capitalización. En este último, su valor afecta fuertemente al monto del ahorro acumulado en la cuenta personal del afiliado.

La Alícuota de Aporte no se destina en su totalidad al financiamiento del Ahorro Previsional. De la misma se derivan fondos para atender al pago de una Comisión que cobra la AFJP, y al pago de la Prima de un Seguro de Invalidez y Muerte a favor del Afiliado.

El siguiente Cuadro, elaborado por la SAFJP, permite conocer detalles de la quita que sufre el descuento previsional.

Comisiones

Las AFJP perciben una retribución por la actividad que desempeñan mediante el cobro de comisiones.

La Ley 26.222 establece un tope del 1% a la comisión por administración que pueden cobrar las AFJP. A dicho porcentaje se le podrá adicionar hasta el 31 de diciembre de 2007 el costo del seguro por invalidez y fallecimiento.

Ranking	AFJP	Comisión por Administración	Costo Seguro Colectivo de Invalidez y Fallecimiento	Total		Bonificaciones
				en % del salario	en % del aporte jubilatorio	
1	FUTURA	1,00	0,84	1,84	26	N/A
2	ARAUCA BIT	1,00	0,90	1,90	27	Meses: 13 a 24: 2% 25 a 36: 3% 37 a 48: 4% 49 o más: 6%
2	PROFESIÓN + AUGE	1,00	0,90	1,90	27	N/A
4	NACIÓN	1,00	1,10	2,10	30	N/A
5	UNIDOS	1,00	1,25	2,25	32	N/A
6	CONSOLIDAR	1,00	1,50	2,50	36	N/A
7	MET	1,00	1,54	2,54	36	N/A
8	PREVISOL	1,00	1,63	2,63	38	N/A
9	PRORENTA	1,00	1,65	2,65	38	N/A
10	ORÍGENES	1,00	1,71	2,71	39	N/A
11	MÁXIMA	1,00	1,80	2,80	40	N/A

Esta quita, que corrientemente suele expresarse en términos del Salario, puede también ser expresada en términos del Aporte Jubilatorio.

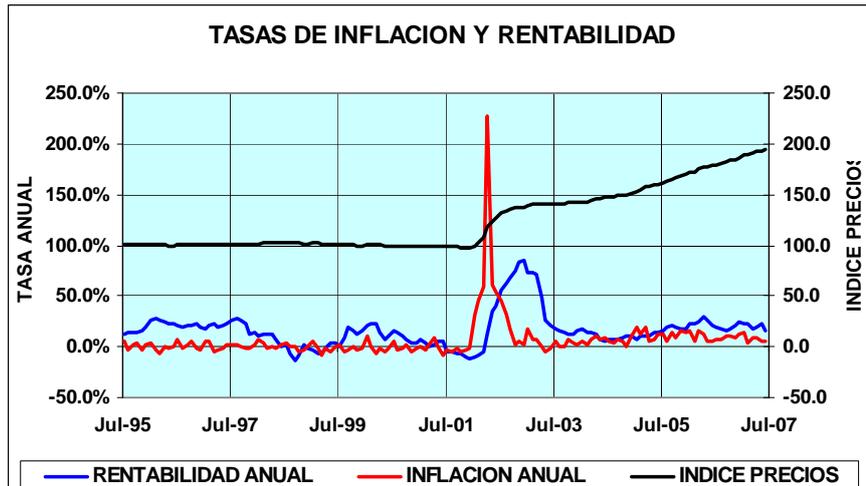
Teniendo en cuenta los distintos valores registrados para la Alícuota de Aporte, esta información se puede resumir en el siguiente Cuadro:

ALICUOTA DE APORTE (S/Salario)	5.00%	7.00%	11.00%
COMISION (S/Salario)	1.00%	1.00%	1.00%
PRIMA SEGURO (S/Salario)	1.50%	1.50%	1.50%
DESCUENTOS (S/Salario)	2.50%	2.50%	2.50%
APORTE (Alicuota - Descuento)	2.50%	4.50%	8.50%
COMISION + SEGURO (S/Aporte)	100.00%	55.56%	29.41%

Actualmente, con una Alícuota de Aporte del 7% del Salario, un Afiliado paga en concepto de Comisión y Seguro, un 55.56% de lo que ahorra para sí. A partir de Enero de 2008, con una Alícuota de Aporte del 11% del Salario, pagará en concepto de Comisión y Seguro, un 29.41% de lo que ahorra para sí.

Finalmente se deben considerar las dos variables de corte financiero: la Tasa de Inflación y la Tasa de Rentabilidad de las Inversiones. La función que se utilice para describir el comportamiento de cada una de estas dos variables, así como el grado de correlación entre las mismas, ha de surgir de la evidencia experimental.

Observemos el comportamiento de las cifras de Inflación y Rentabilidad desde la entrada en vigencia de la Reforma Previsional, a mediados de la década del 90.

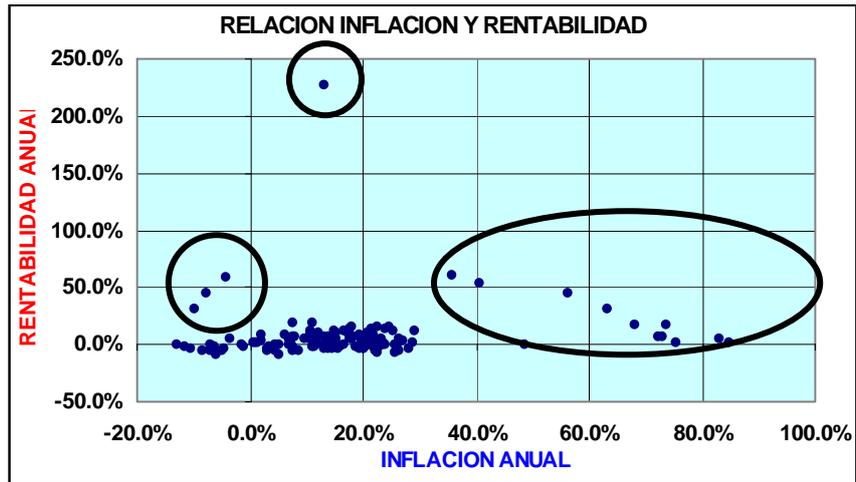


La crisis del año 2001 que vivió Argentina al salir de la Convertibilidad, se puede observar en los valores atípicos de la Tasa

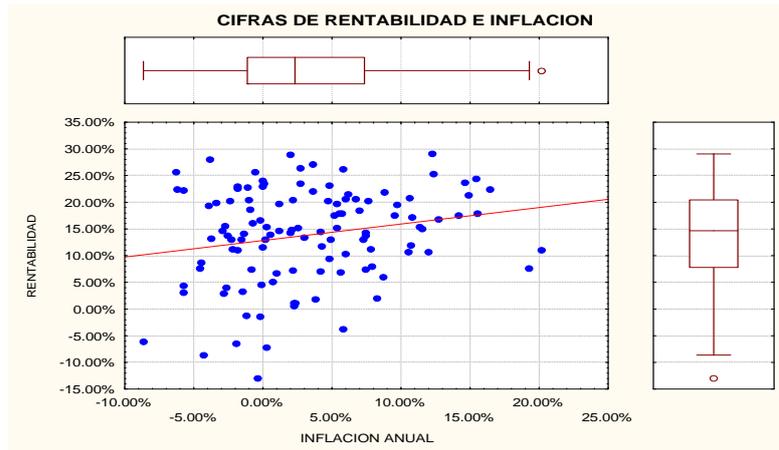
de Inflación Anual. Así como en los valores atípicos de la Tasa de Rentabilidad Anual, registrados unos meses más tarde.

Si a partir de esta información se quieren derivar medidas representativas del comportamiento de cada una de estas dos variables: Inflación y Rentabilidad, previo al análisis se deben eliminar los valores espurios producto de la Crisis.

El siguiente Cuadro, que muestra las relaciones entre las cifras de Inflación y Rentabilidad, permite una inmediata identificación de las observaciones espurias.



Eliminados estos valores consecuencia de la crisis, la relación entre Inflación y Rentabilidad puede ser presentada por medio del



siguiente Diagrama de Dispersión.

Cuyas propiedades numéricas pueden observarse en este Cuadro

INFLACION ANUAL : Media = 3.37% , Sigma = 6.00%

RENTABILIDAD ANUAL : Media = 13.88% , Sigma = 8.81%

Correlación = 0.21

Tanto la Inflación como la Rentabilidad, deben incorporarse al modelo financiero como Variables Aleatorias.

No obstante, en una primera instancia, vamos a considerar como hipótesis de trabajo, que cada una de estas variables se presenta como una constante, igual a su respectivo valor medio.

Supondremos una Inflación constante igual al 3.37% anual, y una Rentabilidad constante igual al 13.88% anual.

En estas condiciones, el cálculo del Ahorro se simplifica notablemente, dando lugar a los siguientes Cuadros:

MODELO CON VALORES CONSTANTES DE INFLACION Y RENTABILIDAD

ALICUOTA DE APOORTE: 7.00% DEL SALARIO

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S						
1										PROYECCION DEL AHORRO PREVISIONAL															
2	Modelos Evolución Salario																								
3																									
4	y	x																							
5	0.4	20	lineal																						
6	1	64	1																						
7	0.01	0.13																							
8	a ₁	a ₀																							
9																									
10	y	x	x'																						
11	0.4	20	400	poldos																					
12	1.65	59	3481	2																					
13	1	64	4096																						
14	0.00	0.06	-0.65																						
15	a ₂	a ₁	a ₀																						
16																									
17	y	x																							
18	-0.92	20	expon																						
19	0.00	64	3																						
20	0.02	-1.33																							
21	a ₁	a ₀																							
22																									
23	Inflexion	42.5	logistico																						
24	Escala	5.00	4																						
25	K	0.6																							
26	Inflexion	39.25																							
27	Escala	4.33	convolucion																						
28	K	0.65	5																						

COMIS SEGUR TOTAL			INGRESO DE PARAMETROS		
SALAR	1.00%	1.50%	2.50%	Edad Ingreso	20
AHORR	22.2%	33.3%	55.6%	Edad Egreso	65
				Salario Inicial	40.0%
				Salario Final	100.0%
				Carrera Salarial	4
				Aleatoriedad	0.0%
				Densidad Cotiz.	100.0%
				Alicuota Aporte	7.0%
				Comisión	1.0%
				Seguro	1.5%
				Inflación	3.37%
				Rentabilidad	13.88%
				Rentabilidad real	10.2%
					0

INFLA. RENT. CONSTANTES														
RESULTADO =>												16.59		
EDAD	activo	lineal	poldos	expon	logist	logemp	convoluc	logist	aleas	densid	inflat	Salario	Aporte	Ahorro
0	0	0.13	-0.65	0.26	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00
1	0	0.14	-0.58	0.27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.12	0.00	0.00	0.00
2	0	0.15	-0.52	0.27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00
3	0	0.17	-0.46	0.28	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.13	0.00	0.00	0.00
4	0	0.18	-0.40	0.29	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00
5	0	0.20	-0.34	0.29	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00
6	0	0.21	-0.28	0.30	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00	0.00
7	0	0.22	-0.23	0.31	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00	0.00
8	0	0.24	-0.17	0.31	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.16	0.00	0.00	0.00



En este Cuadro, se observa, para una alícuota de Aporte fijada en el 7.00% del Salario, que el valor del Ahorro Acumulado, alcanza los 16.50 salarios anuales del último año.

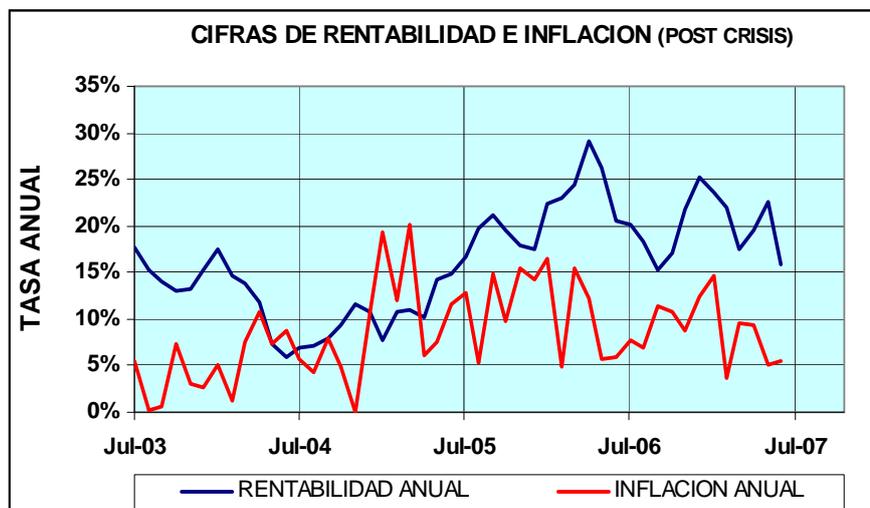
Como vemos, los resultados del modelo dependen fuertemente del nivel de la Alícuota de Aporte, un parámetro fundamental del modelo.

Pero las cifras de Rentabilidad e Inflación, calculados en base al comportamiento de estas dos variables, desde la iniciación del sistema, no se mantienen constantes.

Estudiemos el comportamiento de la Rentabilidad e Inflación, a partir de la crisis del año 2001.

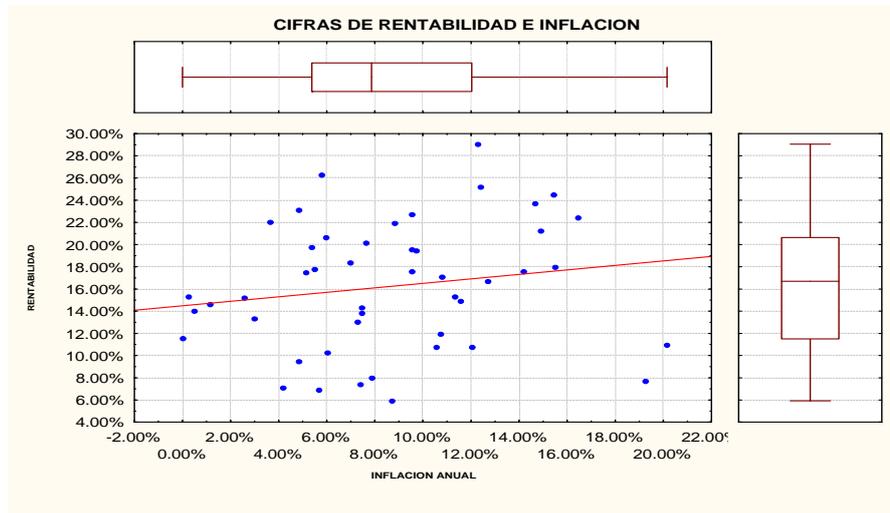
Como series cronológicas:

INFLACION Y RENTABILIDAD LUEGO DEL PERIODO DE CRISIS



o bajo la forma de un Diagrama de Dispersión

INFLACION ANUAL : Media = 8.64% , Sigma = 4.94%
RENTABILIDAD ANUAL : Media = 16.02% , Sigma = 5.77%
Correlación = 0.166



Considerando sólo los valores medios de Inflación y Rentabilidad del período Post-Crisis, podemos recalculer los anteriores Cuadros

MODELO CON VALORES CONSTANTES DE INFLACION Y RENTABILIDAD

ALICUOTA DE APOORTE: 5.00% DEL SALARIO

PROYECCION DEL AHORRO PREVISIONAL																	
Modelos Evolución Salario																	
			COMIS SEGUR TOTAL			INGRESO DE PARAMETROS											
y	x		SALAR	1.00%	1.50%	2.50%	Edad Ingreso								20		
0.4	20	lineal	AHORR	40.0%	60.0%	100.0%	Edad Egreso								65		
1	64	1					Salario Inicial								40.0%		
0.01	0.13						Salario Final								100.0%		
a ₁	a ₂						Carrera Salarial								4		
							Aleatoriedad								0.0%		
y	x	x ⁿ					Densidad Cotiz.								100.0%		
0.4	20	400					Alicuota Aporte								5.0%		
1.05	69	3481					Comisión								1.0%		
1	64	4096					Seguro								1.5%		
0.00	0.06	-0.65					Inflación	8.64%	0.00%								
a ₂	a ₁	a ₃					Rentabilidad	16.02%	0.00%								
							Rentabilidad real	6.8%	0								
INFLA. RENT. CONSTANTES																	
													RESULTADO ->>		3.57		
y	x		EDAD	activo	lineal	poldos	expon	logist	logemp	convoluc	logist	aleas	densid	inflac	Salario	Aporte	Ahorro
-0.92	20	expon	0	0	0.13	-0.65	0.26	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	64	3	1	0	0.14	-0.58	0.27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
a ₁	a ₂		2	0	0.15	-0.52	0.27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
			3	0	0.17	-0.46	0.28	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
Inflacion	42.5	logistico	4	0	0.18	-0.40	0.29	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
Escala	5.00	4	5	0	0.20	-0.34	0.29	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
K	0.6		6	0	0.21	-0.28	0.30	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
Inflacion	39.25		7	0	0.22	-0.23	0.31	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
Escala	4.33	convolucion	8	0	0.24	-0.17	0.31	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
K	0.65	5															



MODELO CON VALORES CONSTANTES DE INFLACION Y RENTABILIDAD

ALICUOTA DE APOORTE: 7.00% DEL SALARIO

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	
2	Modelos Evolución Salario										PROYECCION DEL AHORRO PREVISIONAL									
3											COMIS SEGUR TOTAL					INGRESO DE PARAMETROS				
4	y	x									SALAR	1.00%	1.50%	2.50%	Edad Ingreso	20				
5	0.4	20	lineal	1							AHORR	22.2%	33.3%	55.6%	Edad Egreso	65				
6	1	64													Salario Inicial	40.0%				
7	0.01	0.13													Salario Final	100.0%				
8	a ₁	a ₀													Carrera Salarial	4				
9															Aleatoriedad	0.0%				
10	y	x	x ²								var. Aleatoria				Densidad Cotiz.	100.0%				
11	0.4	20	400	poldos	2						var. Decisión				Alicuota Aporte	7.0%				
12	1.05	59	3481								var. Regulada				Comisión	1.0%				
13	1	64	4096								var. Decisión				Seguro	1.5%				
14	0.00	0.06	-0.65								var. Aleatoria				Inflación	8.64%	0.00%			
15	a ₂	a ₁	a ₀								var. Aleatoria				Rentabilidad	16.02%	0.00%			
16															Rentabilidad real	6.8%	0			
17	y	x																		
18	-0.92	20	expon	3																
19	0.00	64																		
20	0.02	-1.33																		
21	a ₁	a ₀																		
22																				
23	Inflexion	42.5	logístico	4																
24	Escala	5.00																		
25	K	0.6																		
26	Inflexion	39.25																		
27	Escala	4.33	convolucion	5																
28	K	0.65																		

INFLA. RENT. CONSTANTES														
RESULTADO ==>> 6.43														
EDAD	activo	lineal	poldos	expon	logist	logemp	convoluc	logist	aleas	densid	inflac	Salario	Aporte	Ahorro
0	0	0.13	-0.65	0.26	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1	0	0.14	-0.58	0.27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
2	0	0.15	-0.52	0.27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
3	0	0.17	-0.46	0.28	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
4	0	0.18	-0.40	0.29	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
5	0	0.20	-0.34	0.29	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
6	0	0.21	-0.28	0.30	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
7	0	0.22	-0.23	0.31	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00
8	0	0.24	-0.17	0.31	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00

The graph shows three data series over a period of 70 years. The red line represents 'Salario' (Salary), which starts at 0.4 and increases exponentially to approximately 1.1. The black line represents 'Aporte' (Contribution), which starts at 0.01 and increases linearly to approximately 0.08. The blue line represents 'Ahorro' (Savings), which starts at 0 and increases to approximately 6.43 by year 70. The X-axis is labeled from 10 to 70, and the Y-axis has two scales: SALARIO (0.0 to 1.2) and MONTO AHORRO (0 to 36).

Como vemos, los resultados del modelo dependen fuertemente del nivel de la Alícuota de Aporte y de la Rentabilidad Real.

La evidencia experimental muestra que las cifras de Inflación y Rentabilidad no son constantes. Además, estando las cifras de Rentabilidad correlacionadas con las cifras de Inflación, ambas deben incorporarse al modelo como **variables aleatorias correlacionadas**. La evidencia experimental permite suponer que la distribución conjunta de ambas variables sigue una ley de probabilidad Normal Bivariada con los siguientes parámetros:

	RENTABILIDAD	INFLACION
media	16.02%	8.64%
sigma	5.77%	4.94%
rho	0.166	

Los que ingresados al modelo, permiten observar los siguientes resultados.

ALICUOTA DE APOORTE 5%

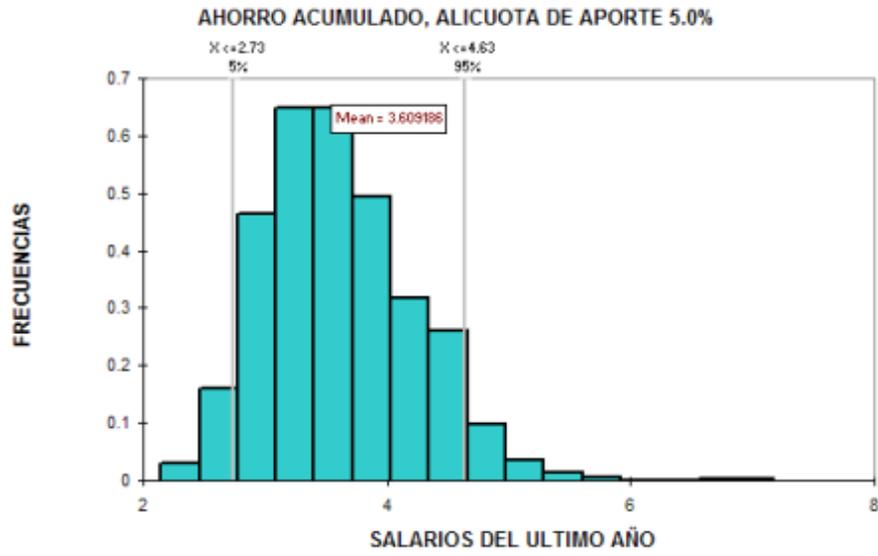
INFLACION MEDIA 8.64%, RENTABILIDAD MEDIA 16.02%

	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	PROYECCION DEL AHORRO PREVISIONAL																
2																	
3	INGRESO DE PARAMETROS																
4	Edad Ingreso	20															
5	Edad Egreso	65															
6	Salario Inicial	40.0%															
7	Salario Final	100.0%															
8	Carrera Salarial	4															
9	Aleatoriedad	0.0%															
10	Densidad Cotiz.	100.0%															
11	Alicuota Aporte	5.0%															
12	Comisión	1.0%															
13	Seguro	1.5%															
14	Inflación	8.64%	4.94%														
15	Rentabilidad	16.02%	5.77%														
16	Rentabilidad real	6.8%	0.166														
17																	
18	INFLA. RENT. CONSTANTES																
19	logist	logemp	convoluc	logist	aleas	densid	infiac	RESULTADO ==>									
20	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.00	Salario	Aporte	Ahorro							
21	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00							
22	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00							
23	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00							
24	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00							
25	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00							
18	INFLACION, RENTABILIDAD ALEAS																
19	z1	z2	INFLAC	RENTAB	RESULTADO ==>												
20	-0.10	-0.21	0.08	0.12													
21	0.28	-0.87	0.10	0.13													
22	0.31	-0.80	0.10	0.17													
23	-1.00	0.28	0.04	0.12													
24	-0.19	-0.74	0.08	0.11													
25	0.24	-1.26	0.10	0.11													

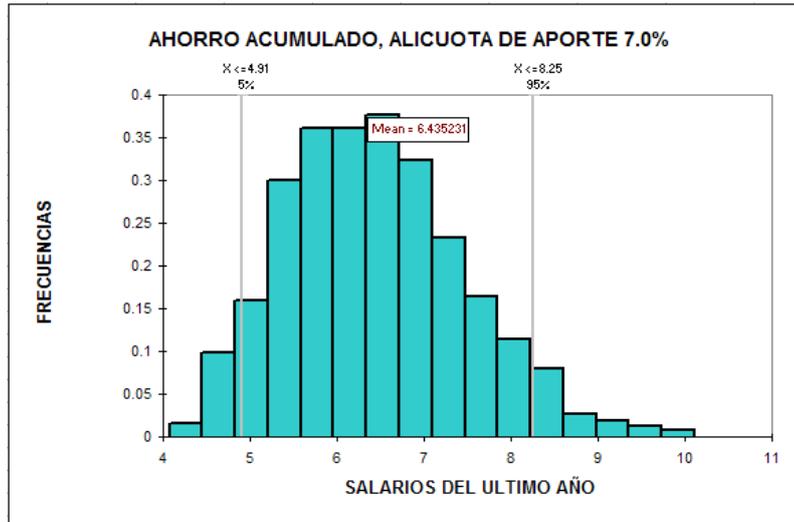


Como el procedimiento de simulación, que ahora incorpora a las cifras de Inflación y Rentabilidad como variables aleatorias, no se limita a una única evaluación, obtendremos una distribución de valores del Ahorro Capitalizado para cada valor de la Alícuota de Aporte.

ALICUOTA DE APOORTE 5%
INFLACION MEDIA 8.64% , RENTABILIDAD MEDIA
16.02%
CORRELACION 0.16



ALICUOTA DE APOORTE 7%
INFLACION MEDIA 8.64% , RENTABILIDAD MEDIA
16.02%
CORRELACION 0.16



Y finalmente, para una alícuota de aporte del 11% del Salario:

ALICUOTA DE APOORTE 11%

INFLACION MEDIA 8.64%, RENTABILIDAD MEDIA 16.02%

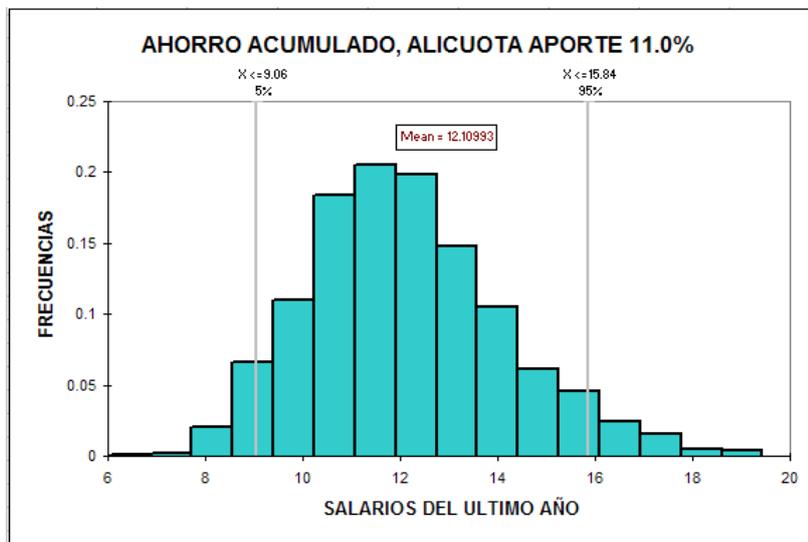
	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	PROYECCION DEL AHORRO PREVISIONAL																
2																	
3	INGRESO DE PARAMETROS																
4	Edad Ingreso	20															
5	Edad Egreso	65															
6	Salario Inicial	40.0%															
7	Salario Final	100.0%															
8	Carrera Salarial	4															
9	Aleatoriedad	0.0%															
10	Densidad Cotiz.	100.0%															
11	Alicuota Aporte	11.0%															
12	Comisión	1.0%															
13	Seguro	1.5%															
14	Inflación	8.64%	4.94%														
15	Rentabilidad	16.02%	5.77%														
16	Rentabilidad real	6.8%	0.166														
17																	
18																	
19																	
20	logist	logemp	convoluc	logist	aleas	densid	inflac	Salario	Aporte	Ahorro	INFLACION, RENTABILIDAD ALEAS						
21	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	z1	z2	INFLAC	RENTAB	AHORRO	12.61	
22	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.63	0.09	0.12	0.00		
23	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-0.08	-1.09	0.08	0.16	0.00		
24	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-1.07	-0.03	0.03	0.12	0.00		
25	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	1.46	-0.62	0.16	0.20	0.00		
26	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-3.30	0.69	-0.08	0.12	0.00		
27	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	-1.96	-0.26	-0.01	0.13	0.00		
28	0.40	0.40	0.40	0.40	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.08	-0.18	0.09	0.17	0.00		



INFLA. RENT. CONSTANTES
RESULTADO => 12.15

INFLACION, RENTABILIDAD ALEAS
RESULTADO => 12.61

ALICUOTA DE APOORTE 11%
INFLACION MEDIA 8.64% , RENTABILIDAD MEDIA
16.02%
CORRELACION
0. 16



Estos son los elementos del modelo de análisis.

Para evaluar un caso, será necesario alimentar el modelo con la información correspondiente al perfil del caso que se quiere analizar.

Esto implica asignar al modelo los correspondientes valores de

**carrera salarial,
alícuota de aporte,
comisión,
prima de seguro,
densidad de cotización,
inflación y
rentabilidad.**

Hasta aquí se analizaron modelos probabilísticos que evalúan el monto del ahorro capitalizado durante la vida activa del trabajador. Estos procedimientos permiten obtener distribuciones de frecuencias para el ahorro acumulado.

A partir del ahorro acumulado, procedimientos de cálculo actuarial determinan las correspondientes Anualidades de Renta Vitalicia, lo que permite calcular la Tasa de Sustitución, definida como la relación entre la Anualidad del retiro a percibir, y el importe del último salario.

El resultado de estos cálculos depende fuertemente de la Tabla de Mortalidad considerada y por supuesto, de la Edad de Retiro.

ANOMALIAS DE UN SISTEMA PREVISIONAL FRENTE A UNA EVIDENCIA DEMOGRÁFICA

Para la Tabla de Mortalidad GAM71⁽¹⁾, la esperanza de vida del hombre a los 65 años, su edad de retiro, es de 15.11 años.

Para la misma tabla de Mortalidad, la esperanza de vida de la mujer a los 60 años, su edad de retiro, es de 23.50 años.

Observemos los resultados que muestran dos valorizaciones del mismo modelo, con los mismos parámetros, en el caso del Hombre y en el caso de la Mujer.

¹ Tablas alternativas muestran un comportamiento similar

PROCEDIMIENTO DE CONSULTA PARA VALORIZAR CALCULOS ACTUARIALES

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	CALCULOS ACTUARIALES con la Función de Supervivencia: GAM71 VAR											
2	Tasa Interés Anual :		4.00%		0.96154 v = 1 / (1+i)							
3												
4	EDAD:	65	ESPERANZA VIDA	15.11	$E(x) = 0.5 + N(x) / lx$							
5												
6	RENDA VITALICIA		1	<== Importe de la Anualidad Contingente								
7	EDAD:	65	Diferida n años:	0	<== Diferida, Inmediata							
8	PRIMA UNICA :		10.17	$na(x) = REN * N(x+n) / D(x)$								
9												
10	PRIMA UNICA		8.77	<== Importe de la Prima Unica								
11	EDAD:	65	Diferida n años:	0	<== Diferida, Inmediata							
12	RENDA VITALICIA :		0.86	$REN = na(x) * D(x) / N(x+n)$								
13												
14	EDAD PROMEDIO											
15	EDAD INIC.	20	En Pirámide Poblac.									
16	EDAD FIN.	65	ARGENTINA VARONL_2000	38.98	<== Edad Promedio ponderado							
17												
18	SEGURO DE VIDA		1	<== Capital asegurado								
19	EDAD:	65	Diferido n años:	0	<== Diferido, Inmediato							
20	PRIMA PURA UNICA :		0.55	$nA(x) = SEG * M(x+n) / D(x)$								
21												
22	SEGURO DE VIDA		5	<== Capital Asegurado								
23	EDAD:	39	Temporalio n años	1	<== Temporalio n años							
24	PRIMA PURA UNICA :		0.70%	$nA'(x) = SEG * (Mx - M(x+n)) / D(x)$								
25												
26												
27	!!!! INGRESAR INFORMACION SOLO EN CELDAS AMARILLAS !!!!											
28	SELECCIONAR FUNCION DE MORTALIDAD DESPLAZANDO CURSOR											

MENU lx

- Rm 1869
- Com Stand
- VARON 47
- MUJER 47
- VARON 91
- MUJER 91
- UNISEX 91
- GAM71 VAR
- GAM71 MUJ
- GAM71 USX 50%
- GAM83 VAR
- GAM83 MUJ
- GAM83 USX 50%
- INDER 84
- LIM100

% Varon
Unisex

PIRAMIDES

- ARG V 2000
- ARG M 2000
- ARG V 2025
- ARG M 2025
- ARG V 2050
- ARG M 2050

% Varon
Unisex

El Cuadro anterior identifica los componentes del procedimiento de consulta para valorizar cálculos actuariales a partir de los datos del problema.

El importe de la Anualidad pura de Renda Vitalicia que le corresponda a un afiliado depende, por supuesto, del Ahorro Acumulado en la cuenta personal del afiliado al Sistema.

Es por eso que previo a la valorización de resultados se debe repetir aquí, tanto para el hombre como para la mujer, el procedimiento de estimación del correspondiente Ahorro Acumulado.

ESTIMACION DEL AHORRO ACUMULADO

VARON, EDAD DE RETIRO 65 AÑOS

ALICUOTA DE APOORTE 11%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S					
1	PROYECCION DEL AHORRO PREVISIONAL																							
2	Modelos Evolución Salario									COMIS SEGUR TOTAL			INGRESO DE PARAMETROS											
3	y	x		SALAR			1.00%			1.50%			2.50%			Edad Ingreso			20					
4	0.4	20	lineal	AHORR			11.8%			17.8%			29.4%			Edad Egreso			95					
5	1	64														Salario Inicial			40.0%					
6	0.01	0.13														Salario Final			100.0%					
7	a ₁	a ₂														Carrera Salarial			4					
8																Aleatoriedad			0.0%					
9																Densidad Cottz.			100.0%					
10	y	x	x ²				var. Aleatoria									Alicuota Aporte			11.0%					
11	0.4	20	400	poldos			var. Decisión									Comisión			1.0%					
12	1.05	59	3481	2			var. Regulada									Seguro			1.5%					
13	1	64	4096				var. Aleatoria									Inflación			8.64%					
14	0.00	0.06	-0.85				var. Decisión									Rentabilidad			16.02%					
15	a ₂	a ₁	a ₂				var. Aleatoria									Rentabilidad real			6.8%					
16																			0					
17	y	x																						
18	-0.92	20	expon																					
19	0.00	64	3																					
20	0.02	-1.33																						
21	a ₁	a ₂																						
22																								
23	Inflexion	42.5	logistico																					
24	Escala	5.00	4																					
25	K	0.6																						
26	Inflexion	39.25																						
27	Escala	4.33	convolucior																					
28	K	0.65	5																					



INFLA. RENT. CONSTANTES
RESULTADO => 12.15

A partir de esta estimación del Ahorro acumulado el procedimiento de consulta para valorizar cálculos actuariales muestra estos resultados:

VARON, EDAD DE RETIRO 65 AÑOS

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
CALCULOS ACTUARIALES con la Función de Supervivencia: GAM71 VAR												
Tasa Interés Anual : 4.00% 0.96154 $v = 1 / (1+i)$												
4	EDAD:	65	ESPERANZA VIDA	15.11	$E(x) = 0.5 + N(x) / lx$							
6	RENDA VITALICIA			1	<== Importe de la Anualidad Contingente							
7	EDAD:	65	Diferida n años:	0	<== Diferida, Inmediata							
8	PRIMA UNICA :			10.17	$na(x) = REN * N(x+n) / D(x)$							
10	PRIMA UNICA			12.15	<== Importe de la Prima Unica							
11	EDAD:	65	Diferida n años:	0	<== Diferida, Inmediata							
12	RENDA VITALICIA :			1.19	$REN = na(x) * D(x) / N(x+n)$							
14	EDAD PROMEDIO											
15	EDAD INIC.	20	En Pirámide Poblac.									
16	EDAD FIN.	60	ARGENTINA VARON_2000	37.35	<== Edad Promedio ponderado							
18	SEGURO DE VIDA			1	<== Capital asegurado							
19	EDAD:	65	Diferido n años:	0	<== Diferido, Inmediato							
20	PRIMA PURA UNICA :			0.55	$nA(x) = SEG * M(x+n) / D(x)$							
22	SEGURO DE VIDA			5	<== Capital Asegurado							
23	EDAD:	38	Temporario n años	1	<== Temporario n años							
24	PRIMA PURA UNICA :			0.65%	$nA(x) = SEG * (Mx - M(x+n)) / D(x)$							
!!! INGRESAR INFORMACION SOLO EN CELDAS AMARILLAS !!!! SELECCIONAR FUNCION DE MORTALIDAD DESPLAZANDO CURSOR												

MENU lx

- Hm 1889
- Com Stand
- VARON 47
- MUJER 47
- VARON 91
- MUJER 91
- UNISEX 91
- GAM71 VAR
- GAM71 MUJ
- GAM71 USX 50%
- GAM83 VAR
- GAM83 MUJ
- GAM83 USX 50%
- INDER 84
- LIN100

PIRAMIDES

- ARG V 2000
- ARG M 2000
- ARG V 2025
- ARG M 2025
- ARG V 2050
- ARG M 2050

de donde resulta:

Para la Tabla de Mortalidad GAM71 la esperanza de vida de un varón de 65 años es 15.11 años.

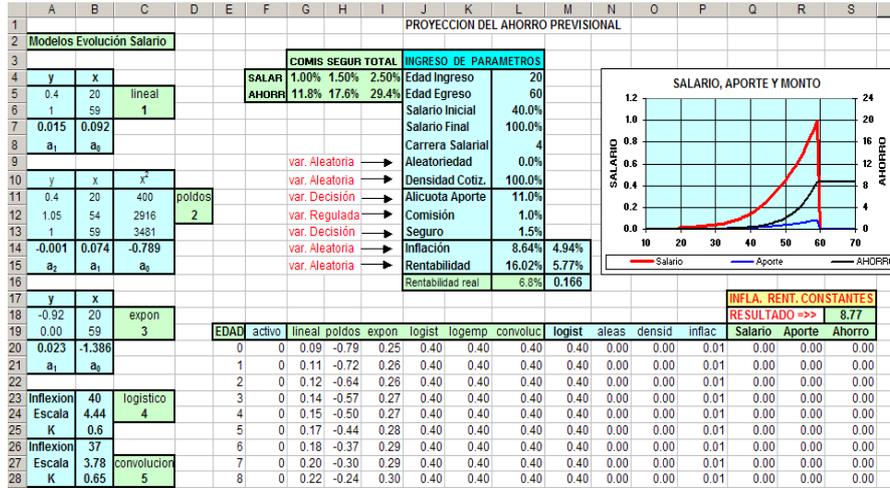
Para un Varón de 65 años, la Anualidad pura de la Renda Vitalicia Inmediata que corresponde a un Capital de 12.15 Salarios del último año, es 1.19 Salarios.

El promedio ponderado de la edad de los varones entre los 20 y los 65 años, es 37.35 años.

La prima pura correspondiente a un seguro de vida temporario por un año, por un capital de 5 salarios anuales (60 sueldos mensuales), para un varón de 38 años es 0.65% del Salario anual del ultimo año.

Si realizamos el mismo análisis para el caso de la mujer, podemos observar a través de los correspondientes resultados que, tal como está diseñado, el sistema previsional, lejos de favorecerla, se vuelve en su contra.

ESTIMACION DEL AHORRO ACUMULADO MUJER, EDAD DE RETIRO 60 AÑOS ALICUOTA DE APOORTE 11%



A partir de esta estimación del Ahorro Acumulado el procedimiento de consulta para valorizar cálculos actuariales muestra estos resultados:

MUJER, EDAD DE RETIRO 60 AÑOS

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
CALCULOS ACTUARIALES con la Función de Supervivencia: GAM71 MUJ												
Tasa Interes Anual : 4.00% 0,96154 v = 1 / (1+i)												
4	EDAD:	60	ESPERANZA VIDA	23.50	$E(x) = 0.5 + N(x) / Ix$							
6	RENDA VITALICIA											
7	EDAD:	60	Diferida n años:	0	<== Importe de la Anualidad Contingente							
8			PRIMA UNICA :	14.14	<== Diferida, Inmediata							
9					$na(x) = REN * N(x+n) / D(x)$							
10	PRIMA UNICA											
11	EDAD:	60	Diferida n años:	0	<== Importe de la Prima Unica							
12			RENDA VITALICIA :	0.62	<== Diferida, Inmediata							
13					$REN = na(x) * D(x) / N(x+n)$							
14	EDAD PROMEDIO											
15	EDAD INIC.	20	En Pirámide Poblac.									
16	EDAD FIN.	60	ARGENTINA MUJER_2000	37.73	<== Edad Promedio ponderado							
18	SEGURO DE VIDA											
19	EDAD:	60	Diferido n años:	0	<== Capital asegurado							
20			PRIMA PURA UNICA :	0.40	<== Diferido, Inmediato							
21					$nA(x) = SEG * M(x+n) / D(x)$							
22	SEGURO DE VIDA											
23	EDAD:	38	Temporario n años:	1	<== Capital Asegurado							
24			PRIMA PURA UNICA :	0.37%	<== Temporario n años							
25					$nA(x) = SEG * (Mx - M(x+n)) / D(x)$							
!!! INGRESAR INFORMACION SOLO EN CELDAS AMARILLAS !!!! SELECCIONAR FUNCION DE MORTALIDAD DESPLAZANDO CURSOR												

MENU Ix

- Hm 1869
- Com Stand
- VARON 47
- MUJER 47
- VARON 91
- MUJER 91
- UNISEX 91
- GAM71 VAR
- GAM71 MUJ
- GAM71 USX
- GAM83 VAR
- GAM83 MUJ
- GAM83 USX
- INDER 84
- LHW100

PIRAMIDES

- ARG V 2000
- ARG M 2000
- ARG V 2025
- ARG M 2025
- ARG V 2050
- ARG M 2050

Para la Tabla de Mortalidad GAM71 la esperanza de vida de una mujer de 60 años, es 23.50 años.

Para una Mujer de 60 años, la Anualidad pura de la Renda Vitalicia Inmediata que corresponde a un Capital de 8.77 Salarios del último año, es sólo el 62% de su Salario anual del último año.

El promedio ponderado de edad de la pirámide poblacional Mujer 2000, entre los 20 y los 60 años, es 37.73 años.

La prima pura correspondiente a un seguro de vida temporario por un año, por un capital de 5 salarios anuales (60 sueldos mensuales), para una mujer de 38 años, es el 0.37% del Salario

anual del último año. (Nótese, poco más de una tercera parte de un 1%).

CONCLUSIONES

Volvamos sobre los anteriores resultados y observemos que en el Sistema Previsional de Capitalización hay una notable disparidad entre el importe de la anualidad pura que puede esperar el hombre para su renta vitalicia, y aquella que puede esperar la mujer.

Los cinco años menos de aporte, y la notable diferencia en la esperanza de vida a la edad de retiro, inciden con frialdad en los resultados del cálculo.

Mientras que para el hombre, en las condiciones ideales del cálculo, la anualidad pura de renta vitalicia se ubica en el 119% del último salario anual, para la mujer, la correspondiente anualidad pura de renta vitalicia, sólo llega al 62% de su último salario anual.

Volvamos nuevamente sobre los anteriores resultados y observemos ahora que el Costo del Seguro de Invalidez y Muerte no reconoce la notable sobrevida que tiene la mujer respecto del hombre.

Esta condición debería verse reflejada en el Costo del Seguro. Nótese que es precisamente en el Costo del Seguro en donde más se nota la discriminación. Mientras que para el hombre, la prima pura de un seguro por un capital de 60 sueldos mensuales (0.65% del salario) está ubicada por debajo del premio que se le cobra,

para el caso de la mujer (0.37% del salario) la relación entre la prima pura y el premio que se le cobra, excede con creces a la relación fijada para el hombre.

Un modelo numérico no puede por sí, cambiar la realidad, tan sólo le cabe mostrarla, a veces con extrema frialdad.

En apoyo de los instrumentos específicos de Estadística y Cálculo Actuarial, se remite al lector interesado a la lectura del "Apéndice Estadístico Actuarial", Versión 2007, de esta misma autoría.

MODELIZACIÓN DE SERIES FINANCIERAS²

Julio Eduardo Fabris

1. INTRODUCCION

El objetivo de esta presentación es hacer un recorrido por los trabajos desarrollados por el autor en los últimos tres años, en los cuales se ha intentado alcanzar el estado actual de las innovaciones en el análisis de series financieras.

En todos los casos en que se ha avanzado sobre nuevos aportes, se lo ha hecho con un criterio aplicado, es decir desarrollando análisis concretos, en general con series financieras obtenidas de los mercados.

Los resultados obtenidos hasta el presente tienen como es usual en estos casos una doble característica : Por una parte nuestros conocimientos sobre técnicas de análisis ha crecido enormemente, permitiéndonos manejar problemas y herramientas de las que en un comienzo no teníamos noticia de su existencia. Por otra parte,

²El presente trabajo se encuentra dentro del proyecto de investigación UBACyT E012 "Evaluación de riesgos financieros extremos en mercados emergentes con énfasis en la argentina" dirigido por la Dra. María Teresa Casparri, desarrollado en el Centro de Investigaciones en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y Gestión (CMA), perteneciente a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires

lejos de agotar el campo de investigación, cada nuevo desarrollo ha llevado a nuevas preguntas.

Por eso podemos decir que, si bien nuestro conocimiento se ha ampliado mucho con la realización de estos trabajos, la conciencia de nuestra ignorancia lo ha hecho aún más.

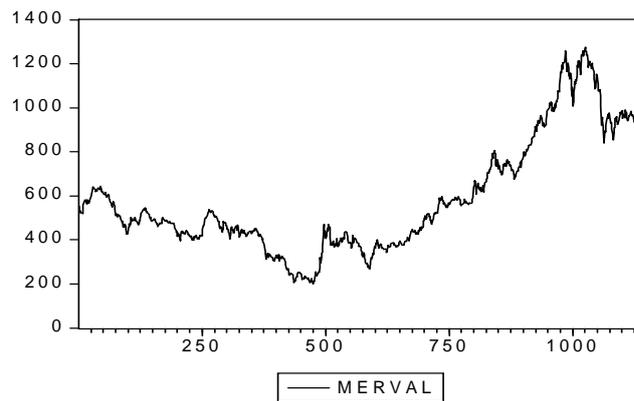
Lejos de desanimarnos, esto nos llena de fuerzas para enfrentar los nuevos desafíos y en eso justamente consiste, creemos, el espíritu de la investigación.

2. EL OBJETO DE ANALISIS : LAS SERIES FINANCIERAS

El análisis que se aborda en esta presentación tiene como objeto de estudio el valor de los activos financieros (acciones , bonos, etc.). Los mismos cotizan en la Bolsa de Valores y se dispone de sus precios para cada jornada. En general se dispone por lo menos de los valores del activo al comienzo y al cierre de la jornada.

Actualmente existe una tendencia a registrar los precios de los activos cada hora o cada media hora (en algunos mercados muy líquidos, como los asiáticos, por ejemplo, se pueden obtener listas de cotizaciones cada 10 ó 20 minutos) con el fin de trabajar con datos de alta frecuencia.

Estos precios de los activos serán nuestro principal insumo, aunque en realidad la mayoría de los estudios financieros se refiere a los retornos de los activos, en vez de a los precios de los mismos.



Indice Merval

Desde el 3 de enero de 2000 hasta el 6 de septiembre de 2004.

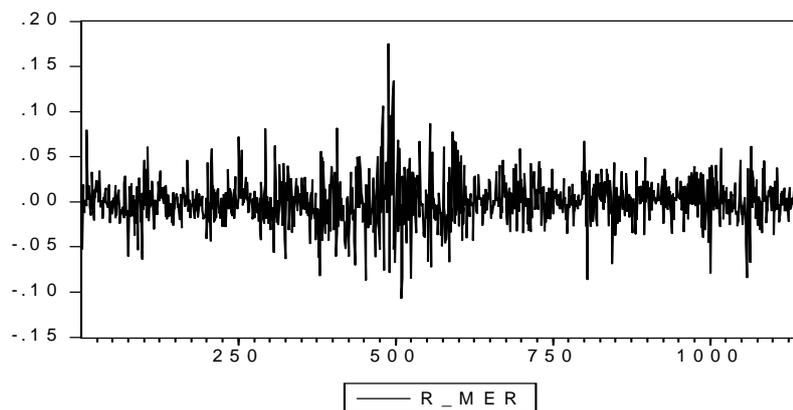
Generalmente se mencionan al menos dos razones para trabajar con los retornos en lugar de trabajar con precios

- 1) La variable de interés para el inversor es el retorno que obtendrá por su dinero y no el precio que alcanzan los activos que adquiere.
- 2) Los retornos de los activos tienen propiedades estadísticas que los hacen más fácilmente manejables en los análisis cuantitativos.

Supongamos por el momento que el activo que estamos estudiando no paga dividendos. En ese caso el llamado RETORNO SIMPLE del activo para un período (supongamos que disponemos de los precios mes a mes) se calcula teniendo en cuenta la evolución del precio del mismo desde el período anterior hasta el actual.

$$R_t^m = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad \text{Retorno simple neto}$$

Por supuesto este retorno sólo podría ser apropiado por el inversor si no existieran comisiones por las operaciones de compra y venta. En los estudios teóricos se suele hacer abstracción de dichas comisiones ya que son muy variables dependiendo del mercado y del volumen de transacciones al que se apliquen. En este desarrollo seguiremos esa tradición .



Indice Merval

Retornos del índice desde 03/01/2000 hasta 06/09/2004

Existe otra forma de cuantificar el rendimiento de una inversión. Es el retorno que se denomina retorno continuo ó logarítmico y que se calcula como :

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$$

Donde ln indica el logaritmo natural ó neperiano (logaritmo con base en el número e ó número de Neper, a diferencia del tradicional logaritmo de base 10 : log). Ambos cálculos tienen resultados muy similares para los retornos usuales.

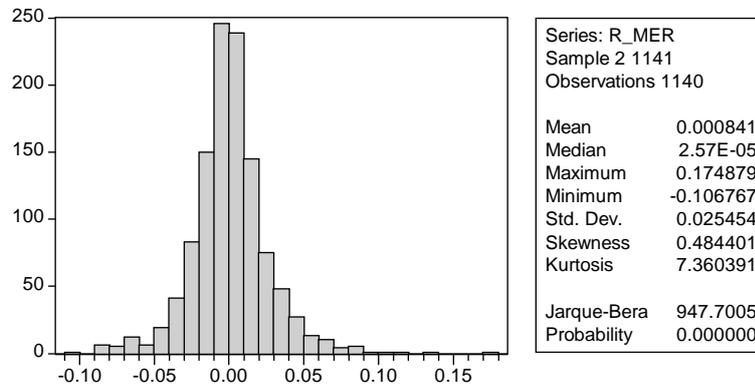
En el caso de las series de tiempo financieras se observa la particularidad de tener volatilidades cambiantes a lo largo del tiempo. Estos cambios tienden a estar correlacionados en el sentido de que grandes cambios en el valor de la serie son seguidos por grandes cambios (períodos de mucha volatilidad), mientras que cambios pequeños en el valor de la serie son seguidos por cambios pequeños (períodos de baja volatilidad). En términos estadísticos este agrupamiento se traduce en correlaciones positivas en la serie de los cuadrados. Esta propiedad, junto con otras como el exceso

de curtosis o la ausencia de correlación en los niveles, son consideradas como características típicas de las series financieras.

Características específicas de las series de tiempo financieras

- Agrupamientos con períodos de alta y baja volatilidad (heterocedasticidad)
- No normalidad de las observaciones (leptocurtosis)
- Asimetría en la reacción de la varianza condicional a los cambios de alza y caída de los retornos

La primera de las características se observa claramente en el gráfico de los retornos del Merval, mientras que para explicar la segunda debemos realizar un histograma de los valores de dichos retornos



En el gráfico anterior (obtenido mediante el software econométrico EViews se verifica un valor de curtosis $K=7,36$, frente al valor de $K=3$ de la distribución normal. Por otra parte el test de Jarque Bera rechaza la hipótesis nula de normalidad.

3. METODOLOGIAS DE ANALISIS

A fines de los años 60 del siglo pasado la econometría se encontraba en un período de relativo auge. Siguiendo las pautas dadas por Cowles y la Sociedad Econométrica, se habían desarrollado los grandes modelos macroeconómicos basados en la teoría económica del momento (Keynesiana). Estos modelos eran estructurales y contaban con una gran cantidad de ecuaciones simultáneas y variables explicativa

Sin embargo las predicciones proporcionadas por estos modelos eran pobres y comenzaron a ser atacados tanto desde el punto de vista de la teoría económica que utilizaban como desde el punto de vista econométrico.

Desde este último punto de vista surgió una metodología rival que cobró popularidad a partir de la publicación del libro de Box y Jenkins : "Time Series Analysis. Forecasting and control", en 1970.

Box y Jenkins proponían un análisis univariado de las series de tiempo, es decir no basado en variables explicativas como proponía la econometría tradicional, sino postulando la existencia de un proceso estocástico generador de los datos que proporcionaba a la serie una estructura autorregresiva, la cual podía descubrirse analizando las realizaciones pasadas de la variable en estudio.

En realidad los fundamentos de este análisis habían sido desarrollados tempranamente en la tercera década del siglo pasado.

Yule en 1921 ya había introducido los procesos de promedios móviles. Se trata de procesos donde el valor adoptado por una variable en un momento t se obtiene a partir de la suma de una constante mas el promedio ponderado del valor en t y los valores en períodos anteriores de una perturbación aleatoria independientemente distribuida.

$$\text{Modelo MA(2)} \quad y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$$

donde los ε_i representan los valores de la perturbación, , los θ_i son los ponderadores que indican la persistencia de los shock pasados y μ es la constante. El orden q (2 en este caso) indica la cantidad de rezagos de la perturbación ε tenidos en cuenta.

También en 1927 Yule propone un modelo que hoy denominamos autorregresivo y lo aplica a la predicción de las manchas solares. Este modelo explica el valor de una variable en el momento t a partir del valor de la misma en períodos anteriores y de un shock aleatorio sobreimpuesto a esta componente determinística.

Modelo AR(3)
$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

donde los ϕ_i son coeficientes que indican la influencia de las realizaciones anteriores de la variable sobre la realización en t de la misma, ε_t es una perturbación aleatoria independientemente distribuida y δ es una constante. El orden p (igual a 3 en este caso) indica la cantidad de rezagos tenidos en cuenta.

Es interesante que bajo ciertas condiciones de estabilidad se puede convertir un modelo MA en un modelo AR y viceversa.

Además se pueden combinar proceso autorregresivos (AR) y procesos de promedios móviles (MA) para obtener procesos mixtos (ARMA)

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

Modelo ARMA (p, q) , donde p indica el orden de los rezagos de la variable y q el orden de los rezagos de la perturbación aleatoria.

En 1938 Wold demostró que cualquier proceso estocástico estacionario, lineal o no, puede representarse univocamente como la suma de un proceso determinístico y un proceso MA de orden infinito.

Por lo tanto, dada una suficiente estabilidad en el mecanismo probabilístico subyacente que genera la serie de tiempo, su parte estocástica puede ser representada por un modelo de la forma estudiada por Yule. Así este modelo se convierte en la clave del análisis.

Para cerrar el panorama queremos señalar que si bien la metodología Box-Jenkins se popularizó rápidamente, pasado el entusiasmo inicial comenzaron a aparecer sus debilidades. Algunas de tipo técnico, referidas esencialmente a la determinación del tipo de tendencia (determinística o estocástica) con la que evoluciona la variable en estudio.

Este tema refiere a que, antes de la metodología Box-Jenkins, la tendencia era modelada típicamente como una simple tendencia determinística lineal en el tiempo, mientras que la nueva metodología permitía tendencias surgidas del efecto acumulativo de

shocks aleatorios, resultando en una "tendencia estocástica". Una consecuencia directa de esto para el pronóstico es que el pronóstico de largo plazo no revierte a una tendencia fija ya que la ubicación de la tendencia subyacente es redefinida cada período.

Sin embargo la distinción entre ambos tipos de tendencia se ha revelado persistentemente difícil y no se ha logrado una metodología generalmente aceptada.

Esta es una de las razones por las que se prefiere trabajar con los retornos de los activos financieros, en lugar de con sus precios. Estas últimas series son no estacionarias en media, mientras que los retornos son en general estacionarios y por lo tanto no presentan este problema estadístico que dificultaría su tratamiento. Para la modelización de la media de la serie, como se ha dicho, se aplica la metodología Box – Jenkins, con lo cual se identifica un modelo ARMA (p, q) que sería el proceso generador de los datos analizados.

$$Y_t = \delta + \phi_1 \cdot Y_{t-1} + \dots + \phi_p \cdot Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \cdot \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \cdot \varepsilon_{t-q}$$

Sin embargo el residuo de la regresión, si bien es ruido blanco, "hereda" la heterocedasticidad (es decir la no constancia de la varianza) ya existente en la serie. Esta característica, que es exclusiva de las series económicas financieras, y se ha dado en

llamar Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva como mas adelante se explica.

4. MODELOS ALTERNATIVOS

Existen dos alternativas para la modelización del residuo heterocedástico resultante de la regresión de las series financieras :

- Modelos ARCH : Modelos de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva
- ***Modelos SV : Modelos de volatilidad estocástica***

Modelos ARCH :

En la econometría existen desde hace un tiempo modelos desarrollados especialmente para capturar la dinámica de las series financieras. El trabajo pionero de Engle (1982), que dio origen a los modelos ARCH (modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva), y el trabajo de Bollerslev (1986), que presentó una generalización del modelo denominada GARCH o ARCH generalizado, fueron el punto de partida para el desarrollo de una extensa familia de modelos y una profusa literatura especializada.

La formulación básica de estos modelos consiste en modelar la serie de interés $\{y_t\}_{t=1}^T$ según la ecuación:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

donde ε_t es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y varianza unitaria, y σ_t es un factor denominado volatilidad.

En el modelo mas simple y_t es un proceso serialmente incorrelacionado y con media cero, y σ_t es una función positiva. Los diferentes modelos de la familia ARCH surgen de las distintas formas de modelizar σ_t^2 . En el modelo ARCH(q) dicha especificación viene dada por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

donde ω representa la varianza media y ε_t las innovaciones en la volatilidad de la serie. Por lo tanto, la varianza condicional contemporánea (o sea la del momento t) resulta depender de los rezagos de las mencionadas innovaciones (o sea de los valores en t -1 , t - 2, etc.)

Bollerslev generalizó el modelo para permitir una especificación mas general de la varianza condicional como un modelo ARMA (p,q).

Este modelo recibió la denominación de ARCH generalizado o GARCH y sus ecuaciones son:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$

A partir de la especificación del modelo de Engle los trabajos de investigación tanto teórica como empírica sobre los modelos ARCH se multiplicaron, dando lugar a una amplia familia de modelos, de los cuales solo mencionaremos algunos.

Engle y Bollerslev (1986) propusieron un modelo GARCH(1,1) integrado o IGARCH, en el que los parámetros suman uno ($\alpha + \beta = 1$), para reflejar los estudios empíricos que mostraban que en las series financieras las estimaciones de α y β daban una suma de los parámetros estimados muy próxima a la unidad. Es decir que el modelo IGARCH(1,1) vendría dado por :

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + (1 - \alpha) \sigma_{t-1}^2 + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$$

Otra extensión surge de la crítica de Nelson (1991) quien observó que las condiciones impuestas sobre los parámetros para asegurar la no negatividad de σ_t^2 , a menudo eran violadas en los resultados empíricos y además el modelo no podía modelizar la respuesta asimétrica de la volatilidad a la subida y el descenso de los precios. Para superar estas deficiencias que criticaba propuso el modelo

GARCH exponencial o EGARCH. En este modelo se garantiza la no negatividad de la varianza condicional formulando la ecuación de la volatilidad en términos del logaritmo de σ_t^2 . La especificación del modelo es como sigue:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \varphi_i \ln \sigma_{t-i}^2 + \alpha \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}}$$

Esta función, que depende del signo y de la magnitud de ε_t , puede capturar una respuesta asimétrica de la volatilidad ante innovaciones de distinto signo, permitiendo modelar el efecto contrastado empíricamente en muchas series financieras de que las malas noticias (rendimientos negativos) provocan un mayor aumento de la volatilidad que las buenas noticias (rendimientos positivos).

Otra variante de modelo con respuesta asimétrica es el modelo TARCH, también denominado modelo GJR por las iniciales de los proponentes, Glosten, Jagannathan y Runkle. En este caso la especificación de la varianza condicional es :

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

donde d_t es una variable dummy que toma valor 1 si $\varepsilon_t < 0$ y toma valor 0 en caso contrario.

En este modelo las buenas noticias y las malas noticias tienen diferentes efectos sobre la varianza condicional debido a la inclusión de la variable dummy citada. . Si $\gamma \neq 0$ el impacto de las noticias es asimétrico . Si $\gamma > 0$ se habla de un efecto "apalancamiento".

En realidad los modelos descriptos son solo algunos de los mas utilizados en un repertorio creciente de propuestas basadas en los principios ARCH.

Un problema aún debatido en este contexto es cómo seleccionar entre los diversos modelos propuestos cuál es el que mejor modeliza y/o predice la volatilidad de la serie. La bibliografía especializada ha propuesto varios caminos, los cuales se recorren en un trabajo del autor denominado "Modelización de series financieras mediante modelos ARCH. Criterios de selección de modelos" , presentado en las Quintas Jornadas de Tecnología aplicada a la Educación Matemática Universitaria, realizadas en la Facultad de Ciencias Económicas – UBA, Buenos Aires, 24 de junio de 2005.

En el mismo se mencionaba la metodología usual de selección consistente en la cuantificación de los llamados "criterios de información" , de los cuales los más conocidos son :

Akaike Information Criterion (AIC) :
$$-2\left(\frac{l}{T}\right) + 2\left(\frac{k}{T}\right)$$

$$\text{Schwarz Criterion (SC)} : -2\left(\frac{l}{T}\right) + k \frac{\ln(T)}{T}$$

La metodología consiste en considerar mejor al modelo con mas bajo valor del criterio elegido. Es que el valor sube a mayor cantidad de parámetros utilizados para ajusta (se favorece una especificación parsimoniosa) y baja a mayor bondad del ajuste, medida esta por el valor de l , logaritmo de la función de verosimilitud.

Esta metodología es :

- sencilla de utilizar
- sugerida en el software de uso comercial [EViews, PC-Give, Matlab, etc] .

Sin embargo la opinión de los expertos siembra dudas sobre su corrección. Así, Bollerslev, Engle y Nelson en "Arch models" aseveran : "Los criterios estandar para la selección de modelos tales como el criterio de Akaike y el de Schwarz han sido ampliamente utilizados en la literatura ARCH, aunque sus propiedades estadísticas en el contexto ARCH son desconocidas. Esto es particularmente cierto cuando la validez de los supuestos distribucionales subyacentes a la verosimilitud están en duda". En el trabajo citado se propone una metodología alternativa : Selección de modelos mediante funciones de pérdida, que es la adoptada por el autor.

La metodología consiste en la utilización de una regresión auxiliar para evaluar una función de pérdidas utilizando valores dentro de la muestra y valores fuera de la misma.

Las funciones de pérdida son del tipo :

$$L_1 = \sum_{t=1}^T (e_t^2 - \sigma_t^2)^2 \quad \text{ó} \quad L_2 = \sum_{t=1}^T \left[\ln \left(\frac{e_t^2}{\sigma_t^2} \right) \right]^2$$

La regresión auxiliar, denominada es :

$$\hat{e}_t^2 = \alpha + \beta \hat{\sigma}_t^2 + v_t \quad \text{Modelo I}$$

y para ella debería esperarse , $\alpha = 0$; $\beta = 1$; R^2 alto

Se realiza un test de la hipótesis conjunta

$$H_0) \alpha = 0 ; \beta = 1$$

$$H_1) \alpha \neq 0 ; \beta \neq 1$$

y los modelos que no fueron rechazados se seleccionan en base a su R^2 en la regresión auxiliar.

El argumento que subyace a la metodología es : Un mejor ajuste, indica una mayor concordancia entre la realización de la varianza condicional (cuyo proxy es el residuo al cuadrado) y la varianza condicional estimada.

Es posible también expresar la regresión auxiliar en logaritmos para tener en cuenta los efectos de escala

$$\ln(\hat{e}_t^2) = \alpha + \beta \ln(\hat{\sigma}_t^2) + v_t \quad \text{Modelo II}$$

Por otra parte es posible también realizar la selección de modelos mediante evaluación de la bondad del ajuste (dentro de la muestra con la que se estimó el modelo) ó evaluando su capacidad predictiva (fuera de la muestra con la que se estimó el modelo). Los resultados a los que se arriba en el trabajo mencionado son :

Modelo	Cumple Test	R2 modelo I	R2 modelo II	Mejor
ARCH(7)	SI	0.153334	0.053455	* Modelo 1
GARCH(1,1)	SI	0.140153	0.057081	
TARCH(1,1)	SI	0.128397	0.061698	* Modelo 2
EGARCH(1,1)	SI	0.119195	0.061299	

Las conclusiones fueron :

- La selección de modelos del repertorio ARCH para la modelización de la volatilidad condicional, es todavía un tema sobre el que no se han alcanzado consensos.
- Se deben realizar todos los ensayos posibles y , dado que no existe un "camino real" en este problema de la selección de modelos, el econometrista deberá utilizar esta batería de test para decidir , mediante la aplicación crítica de sus conocimientos y experiencia, el modelo a utilizar en su trabajo de aplicación.

Modelos de Volatilidad Estocástica SV

Una alternativa a la modelización de series financieras con la familia de procesos ARCH son los Modelos de Volatilidad Estocástica (SV) introducidos por primera vez por Taylor (1986). En estos modelos σ_t^2 no depende de las observaciones pasadas de la serie sino de una variable no observable, que se modela en general como un proceso estocástico autorregresivo. Para garantizar la positividad de la varianza la ecuación de la volatilidad se define para el logaritmo natural de σ_t^2 , al igual que en el modelo EGARCH.

Sea r_t el retorno de un activo entre el período $t-1$ y el período t , un modelo simple de volatilidad estocástica tiene la forma

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \cdot \varepsilon_t & \varepsilon_t &: iid \ N(0,1) \\ h_t = \ln \sigma_t^2 &= \gamma + \phi h_{t-1} + \eta_t & \eta_t &: iid \ N(0, \sigma_\eta^2) \\ E[\varepsilon_t \eta_t] &= 0 \end{aligned}$$

Donde $0 < \phi < 1$. Definiendo $y_t = \ln(r_t^2)$, resulta ser

$$\begin{aligned} r_t^2 &= \sigma_t^2 \varepsilon_t^2 \\ y &= \ln(r_t^2) = \ln(\sigma_t^2) + \ln(\varepsilon_t^2) \end{aligned}$$

Se puede demostrar que, dado que $\varepsilon_t : N(0,1)$, $\ln(\varepsilon_t^2)$ sigue una distribución $\log \chi^2$, con $E[\ln(\varepsilon_t^2)] = -1,27$ y $Var(\ln(\varepsilon_t^2)) = \pi^2/2$.

Se define entonces $\xi_t = 1,27 + \ln(\varepsilon_t^2)$

con lo cual $E[\xi_t] = 1,27 + E[\ln(\varepsilon_t^2)] = 0$

y $Var[\xi_t] = Var[\ln(\varepsilon_t^2)] = \pi^2/2$

la representación para y_t en función de la componente no observable h_t toma la forma :

$$\begin{aligned}y_t &= -1,27 + h_t + \xi_t & \xi_t &:iid (0, \pi^2/2) \\h_t &= \gamma + \phi h_{t-1} + \eta_t & \eta_t &:iid N(0, \sigma_\eta^2) \\E[\xi_t \eta_t] &= 0\end{aligned}$$

Si ξ_t , que es independiente e idénticamente distribuida, tuviera distribución normal, entonces los parámetros $\Omega = (\gamma, \phi, \sigma_\eta^2)$ del modelo de volatilidad estocástica podrían ser eficientemente estimados maximizando la descomposición del error de predicción de la función de verosimilitud logarítmica construida con el aplicación del filtro de Kalman. Sin embargo, como $\xi_t = \ln(\varepsilon_t^2)$ no está normalmente distribuida, el filtro de Kalman solo provee estimadores lineales minimizadores del error cuadrático medio de la variable de estado y de las observaciones futuras. Sin embargo la verosimilitud logarítmica exacta no puede ser calculada a partir de la descomposición del error de predicción basada en el filtro de Kalman, los estimadores de $\Omega = (\gamma, \phi, \sigma_\eta^2)$ obtenidos de tratar a ξ_t como si fuera $\xi_t:iid N(0, \pi^2/2)$ y de maximizar la función de cuasi-verosimilitud, son estimadores consistentes.

La estimación cuasi-máximo verosímil del modelo SV es consistente pero ineficiente. Sin embargo tiene la ventaja de poder extenderse, sin ninguna modificación, a casos mas generales en los que, por ejemplo, h_t sea un proceso más complicado, o incluso se consideren modelos multivariantes. Recientemente se han desarrollado técnicas para poder lograr la maximización de la función log-verosímil exacta del modelo, usando métodos de Monte Carlo intensivos para aproximar la densidad $\log \chi^2$ de $\xi_t = \ln(\varepsilon_t^2)$.

El modelo simple anteriormente presentado puede generalizarse en forma inmediata haciendo que h_t sea un modelo ARMA(p,q) estacionario, lo cual permitiría un mejor ajuste en el modelo.

También es posible extender el modelo SV de forma que la ecuación que modela a h_t contenga una raíz unitaria. Esto permite abordar el análisis empírico de las series financieras que producen un valor estimado de ϕ muy próximo a uno.

El modelo SV con raíz unitaria mas sencillo se obtiene suponiendo que h_t es un paseo aleatorio y por lo tanto las ecuaciones que definen el modelo quedan

$$\begin{aligned} r_t &= \sigma_t \varepsilon_t & \varepsilon_t &: iid N(0,1) \\ h_t = \ln \sigma_t^2 &= \gamma + h_{t-1} + \eta_t & \eta_t &: iid N(0, \sigma_\eta^2) \\ E[\varepsilon_t \eta_t] &= 0 \end{aligned}$$

Y considerando la misma transformación logarítmica que en el caso estacionario

$$\begin{aligned}y_t &= -1,27 + h_t + \xi_t & \xi_t &:iid (0, \pi^2/2) \\h_t &= \gamma + h_{t-1} + \eta_t & \eta_t &:iid N(0, \sigma_\eta^2) \\E[\xi_t \eta_t] &= 0\end{aligned}$$

Este modelo se denomina RWSV (Random Walk SV) no es estacionario ya que h_t es un proceso ARIMA(0,1,1). Por lo tanto resulta cierta analogía del modelo RWSV con el modelo IGARCH(1,1).

Por último Harvey y Shepard (1996) prueban que si ε_t y η_t están correlacionados, el modelo SV puede replicar la respuesta asimétrica de la volatilidad a los cambios de signo en la serie y_t , recogiendo así efectos similares a los del modelo EGARCH.

Los modelos de volatilidad estocástica han sido menos utilizados que los modelos de tipo ARCH, para los cuales la literatura es profusa, sin embargo tienen algunas ventajas sobre estos últimos como ya se dijo.

Como desventajas cabe citar la ya mencionada menor difusión, lo cual hace que los estudios disponibles no sean muy numerosos; y el problema de su difícil estimación, al no poderse construir la función de verosimilitud en forma exacta.

La investigación de este modelo SV dió lugar a dos trabajos del autor. El primero de ellos : "Análisis de Series Financieras utilizando

Modelos de Espacio de Estados” , realizado en colaboración con Alejo Macaya, fue presentado en las Quintas Jornadas Actuariales , realizadas en la Facultad de Ciencias Económicas – UBA, Buenos Aires, 4 y 5 de noviembre de 2004.

En este primer acercamiento se hacía una caracterización inicial del modelo y especialmente de la metodología de cálculo, el celebrado Filtro de Kalman, que permite la estimación de un modelo de espacio de estados.

El segundo de los trabajos mencionados fue : “Modelo de volatilidad estocástica. Una alternativa para modelizar la volatilidad en los mercados financieros”, realizado en colaboración con Cecilia Gomez y presentado en las Sextas Jornadas Actuariales, realizadas en la Facultad de Ciencias Económicas – UBA, Buenos Aires, 3 y 4 de noviembre de 2005.

En el se intentaba determinar si el modelo SV podía ser un rival de la familia de modelos ARCH. Los resultados a los que se arribó se resumen en el siguiente cuadro, en el que la bondad del modelo está inversamente evaluada por el error del modelo, es decir los valores pronosticados versus los valores efectivamente observados.

Resultados

	Modelo SV	Modelo GARCH
Error Cuadrático Medio	4.55E-06	4.44E-06

Error Absoluto	1.595941	1.150585
Porcentual Medio		

CONCLUSIONES

- El modelo GARCH tiene mejor ajuste que el de volatilidad estocástica
- Las verificaciones de bondad del ajuste presentan resultados de un mismo orden de magnitud
- El modelo de volatilidad estocástica es una alternativa válida

5. ESTIMACION DE MONTE CARLO PARA EL MODELO SV

Como ya se mencionó, recientemente se han desarrollado técnicas para poder lograr la maximización de la función log-verosimil exacta del modelo SV, usando métodos de Monte Carlo intensivos para aproximar la densidad $\log \chi^2$ de $\xi_t = \ln(\varepsilon_t^2)$.

Se trata de métodos que muestrean la distribución posterior en forma indirecta. Entre ellos se encuentran

- Algoritmo de Metropolis-Hastings
- Muestreador de Gibbs

El muestreador de Gibbs se utiliza para generar muestras de la distribución conjunta de un proceso.

$$(Y_1, \dots, Y_k) \in R$$

en el caso de que se disponga de la forma de generar cada una de las distribuciones condicionales completas

$$Y_{-i} = (Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_{i+1}, \dots, Y_k)$$

El muestreador de Gibbs procede así :

1. Especifica un valor inicial $(Y_{1(0)}, \dots, Y_{k(0)})$ para (Y_1, \dots, Y_k)
2. Para $N > 0$ genera $Y_{i(N)}$ a partir de su distribución condicional dado

$$(Y_{1(N)}, \dots, Y_{i-1(N)}, Y_{i+1(N-1)}, \dots, Y_{k(N-1)})$$

para cada $i = 1$ hasta k

Puede demostrarse que en condiciones bastante generales

$$(Y_{1(N)}, \dots, Y_{k(N)}) \text{ converge a la distribución conjunta de } (Y_1, \dots, Y_k)$$

cuando $N \rightarrow \infty$

Por lo tanto el muestreador de Gibbs proporciona un método aproximado de muestreo de la distribución

$$\text{Además } \bar{w} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w(Y_{1(i)}, \dots, Y_{k(i)}) \text{ converge a } E[w(Y_1, \dots, Y_k)]$$

y similarmente para la varianza

En otro trabajo de investigación titulado "Estimación de modelos de volatilidad estocástica utilizando métodos de Montecarlo via cadenas de Markov", presentado en las Séptimas Jornadas Actuariales, realizadas en la Facultad de Ciencias Económicas – UBA, Buenos Aires, 23 y 24 de noviembre de 2006, el autor abordó la estimación de un modelo SV mediante esta novedosa técnica. El método utilizado fue generar observaciones a partir de un modelo especificado y evaluar la capacidad de ambos métodos de estimación, a saber

- Filtro de Kalman utilizando software EViews
- Métodos de Montecarlo utilizando software WinBUGS

El modelo simulado fue

$$r_t = e^{h_t/2} \cdot \varepsilon_t \quad \varepsilon_t: iid N(0,1)$$

$$h_t = \ln \sigma_t^2 = \gamma + \phi(h_{t-1} - \gamma) + \eta_t \quad \eta_t: iid N(0, \sigma_\eta^2)$$

$$\text{Con } \gamma = -0.4 \quad \phi = 0.9 \quad \sigma_\eta = 0.2$$

Se obtuvo la siguiente salida de máquina de la estimación mediante el filtro de Kalman con el software EViews :

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-0.516834	0.185580	-2.784962	0.0054

C(2)	0.927751	0.068312	13.58114	0.0000
C(3)	-3.122565	1.304328	-2.394004	0.0167
<hr/>				
Log likelihood	-1121.648	Akaike info criterion	4.498591	
Parameters	3	Schwarz criterion	4.523878	
Diffuse priors	0	Hannan-Quinn criter.	4.508513	
<hr/>				

$$\gamma = -0.516834 \quad \phi = 0.927751 \quad \sigma_{\eta} = 0.20986 = e^{c(3)/2}$$

Por otra parte , la estimación con el Método de Montecarlo se realizó de la siguiente manera :

- Se realizan 10000 iteraciones iniciales para lograr la convergencia (Burn in)
- Se realizan 100.000 simulaciones de las cuales se seleccionan 1 de cada 20 para que sean incorrelacionadas
- Observaciones disponibles : 5000

El sumario de resultados obtenidos con el método de simulación MCMC resultó ser :

node	mean	sd	2.5%	median	97.5%
sample					

phi 0.9077 0.06807 0.7347 0.9291 0.9823 5000

node mean sd 2.5% median 97.5%
sample

tau 0.1221 0.0367 0.06928 0.1152 0.2079 5000

node mean sd 2.5% median 97.5%
sample

beta 0.7918 0.04671 0.7077 0.7926 0.8861 5000

$$\gamma = -0.4669 = 2 \ln(\beta) \quad \phi = 0.9077 \quad \sigma_{\eta} = 0.1221$$

Finalmente la comparación de los modelos se realiza en un cuadro :

PARAMETRO	PHI	GAMMA	SD (ETA)
EXACTA	0.9	- 0.4	0.2
EST. KALMAN	0.9277	- 0.5168	0.209
EST. MCMC	0.9077	- 0.4669	0.122

Las conclusiones del trabajo fueron :

- El metodo MCMC resulta ser utilizable aunque no demuestra ser definitivamente mejor que el método de cuasi máxima verosimilitud mediante Filtro de Kalman

- Se necesita proseguir la investigación abordando series reales y explorando la capacidad predictiva y el ajuste

6. EL PROBLEMA DE LA BASE DE COMPARACIÓN

La evaluación de modelos consiste en comparar las predicciones logradas con las correspondientes realizaciones. El problema que se plantea es que la variable de interés – la volatilidad - no es directamente observable.

La solución tradicional consiste en postular que si el modelo está correctamente especificado :

$$E_{t-1} [r_t^2] = E [\sigma_t^2 \varepsilon_t^2] = \sigma_t^2$$

Es decir que se utiliza el cuadrado de los retornos como proxy de la varianza.

En realidad r_t^2 es un estimador insesgado de σ_t^2 pero como

$r_t = \sigma_t \varepsilon_t$, ε_t^2 convierte a la medición en muy ruidosa

En consecuencia el ajuste es malo, obteniéndose valores de R^2 del orden de 0,02 a 0,05

Los propulsores de los modelos ARCH propusieron un cambio del enfoque consistente en buscar un mejor estimador para la volatilidad latente

La alternativa adoptada fue la utilización de la llamada "volatilidad realizada" construida mediante la suma de los retornos intradiarios al cuadrado, obtenidos mediante un muestreo de alta frecuencia.

$$\left(\sum_{j=1}^m r_{m,t+j/m} \right)^2$$

Volatilidad realizada vs. Retornos al cuadrado

$$\left(\sum_{j=1}^m r_{m,t+j/m} \right)^2 \quad \text{vs.} \quad r_{1,t+1}^2$$

- $r_{1,t+1}^2$ presenta varianza constante y por lo tanto no es un estimador consistente.
- En ausencia de autocorrelación serial

$$\text{plim}_{m \rightarrow \infty} \left[\int_0^1 \sigma_{t+\tau}^2 d\tau - \hat{\sigma}_{m,t}^2 \right] = 0$$

En otras palabras, la "varianza realizada" es un estimador consistente de la varianza integrada.

Este tema fué abordado en dos trabajos de investigación. El primero de ellos se denominó "Modelos Alternativos para las series financieras – Comparación y selección" y se presentó en las Sextas Jornadas Actuariales, realizadas en la Facultad de Ciencias Económicas – UBA, Buenos Aires, 3 y 4 de noviembre de 2005.

El segundo se denominó "Metodología de selección de modelos para el pronóstico de la volatilidad en series financieras" y se presentó en la VI Conferencia Internacional de Finanzas, realizada en la Universidad de Santiago de Chile, Facultad de Administración y Economía, Santiago de Chile, 8 al 12 de Mayo de 2006.

Para la implementación del método se debe elegir un intervalo de muestreo. De acuerdo con la literatura empírica la frecuencia óptima entre 5 y 25 minutos. Por supuesto esto presenta algunas limitaciones , a saber :

Si los intervalos de observación dentro del día son muy pequeños (m muy grande) puede ocurrir sesgo por fenómenos de microestructura :

- ausencia de liquidez
- trading no simultáneo

La aplicación abordada en los trabajos consistió en el análisis de datos de la acción de las Lineas Aéreas Coreanas (Asiana) y se trataba de datos diarios e intradiarios cada 30 minutos ($m = 12$)

Luego del tratamiento de los datos se realizaba la comparación de los ajustes considerando distintas estimaciones ex-post de la varianza :

- Retornos al cuadrado
- Varianza realizada

Modelo	Cumple Test	R ² Ret. cuad.	R ² Var. Realiz.
ARCH(1)	SI	0.034875	0.083342
GARCH(1,1)	SI	0.058033	0.105526
SV	SI	0.017471	0.055395

Las conclusiones que se pudo extraer del trabajo fueron :

- si se toma como base de comparación la "varianza realizada" , los ajustes resultan sensiblemente mejorados.
- La recopilación de datos de alta frecuencia en los mercados financieros puede mejorar los métodos de modelización, pronóstico de volatilidad y la evaluación de los modelos
- La volatilidad realizada es un proxy consistente de la varianza latente y es preferible a la utilización de los retornos al cuadrado

7. TRABAJOS FUTUROS

Retomando lo dicho en la introducción, estos trabajos nos han presentado nuevos desafíos que esperamos traducir en nuevas investigaciones

Es por eso que nos proponemos abordar en un futuro próximo los siguientes trabajos :

- Estimación de modelos econométricos basada en Metodos de Montecarlo via Cadenas de Markov. Nuevos desarrollos realizados en software genérico (Matlab)

- Modelos multivariados (VAR) de series financieras.

BIBLIOGRAFIA

Abril, J. C. (1999). "Análisis de series de tiempo basado en modelos de espacio de estado". Eudeba, Buenos Aires

Andersen, T. y Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecast. International Economic Review, Nro. 39 Pag. 885-905

Bollerslev, T (1986) "Generalized autorregresive conditional

heterocedasticity", *Journal of Econometrics*, 51, pp. 307-327.

Bollerslev, T. y Engle, R. (1986) "Modelling the persistence of conditional variances", *Econometrics Review*, pp. 1-50.

Chib, S., Nardari, F. y Shephard, N. (2002) Markov chain Monte Carlo methods for stochastic volatility models, *Journal of Econometrics* 108, 281-316

Engle, R. (1982) "Autorregresive conditional heterocedasticity with estimates of the variance of the U.K. inflation", *Econometrica*, 50, pp.987-1008.

Fabris, J. y Macaya, A. (2004), "Análisis de Series Financieras utilizando Modelos de Espacio de Estados" Quintas Jornadas Actuariales, Buenos Aires

Fabris, J. (2005) "Modelización de series financieras mediante modelos ARCH. Criterios de selección de modelos", Quintas Jornadas de Tecnología aplicada a la Educación Matemática Universitaria, Buenos Aires

Fabris, J y Gomez, C. (2005), "Modelo de volatilidad estocástica. Una alternativa para modelizar la volatilidad en los mercados financieros" , Sextas Jornadas Actuariales, Buenos Aires

Fabris, J. (2005) "Modelos Alternativos para las series financieras – Comparación y selección", Sextas Jornadas Actuariales, Buenos Aires

Fabris, J. (2006), "Metodología de selección de modelos para el pronóstico de la volatilidad en series financieras" , VI Conferencia

- Fabris, J. (2006) "Estimacion de modelos de volatilidad estocastica utilizando metodos de montecarlo via cadenas de markov", Séptimas Jornadas Actuariales, Buenos Aires
- Hamilton, J. (1994). "Time Series Análisis". Princeton University Press, Princeton, NJ
- Harvey, A., Ruiz, E. y Shepard, N. (1994) "Multivariate Stochastic Variance Models", *The Review of Economic Studies*, Vol.61, Nro. 2, 347-264.
- Kalman, R. (1960) "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems" *Transactions of the ASME--Journal of Basic Engineering*, Vol. 82, Serie D, pp. 35-45.
- Kim, S., shepard, N. y chib, S. (1998) "Stochastic Volatility: Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models", *The Review of Economic Studies*, Vol.65, Nro. 3, 361-393
- Nelson, D. (1991) "Conditional heterocedasticity in asset returns : A new approach", *Econometrica*, 59, pp. 347-370
- Pagan, A. R. y Schwert, G. W. (1990) "Alternative Models for Conditional Stock Volatility" , *Journal of Econometrics*, 45, 267-290
- Sá Mota, B y Fernandez, M. (2004) "Desempenho de Estimadores de Volatilidade na Bolsa de Valores de Sao Paulo", *RBE*, 58(3):429-448

Taylor, S. (1986). "Modelling financial time series", John Wiley, Chichester, UK.

DINÁMICA CAÓTICA EN MERCADOS FINANCIEROS

Juan Ramón Garnica Hervas

Adriana Caniggia

Esteban O. Thomasz

Paula Garófalo

CIENCIA, FÍSICA, MATEMÁTICA Y ECONOMÍA

El objetivo de la ciencia ha sido explicar y predecir. La ciencia en sí misma, no es más que una forma de pensar, distinta al pensamiento religioso, metafísico, o mitológico. En este afán por explicar el mundo y sus fenómenos, la ciencia no renuncia al determinismo, ya sea total o parcial, llegando incluso a pensarse que sin determinismo no existe la ciencia tal como la entendemos.

El avance sustancial de la ciencias duras, principalmente de la física como ciencia madre, ha incentivado que sus métodos sean aplicados en diversas disciplinas, con el objetivo de intentar aportar formas potenciales de explicación de los fenómenos más allá de las asociaciones, clasificaciones e interpretaciones de los hechos, observables o teórico-observables, que comúnmente son utilizados como medios de análisis en las ciencias sociales.

La ciencia económica no ha sido ajena a la motivación de aplicar herramientas físicas al análisis de los fenómenos económicos e, incluso, podría llegar a afirmarse que constituye el caso más paradigmático.

MODELOS ECONÓMICOS Y/O ECONOMETRICOS

Las características fundamentales que pueden registrarse en la modelización econométrica de series temporales son las siguientes:

- Normalidad
- Linealidad
- Determinismo subyacente

La evolución de los modelos econométricos puede sintetizarse en los siguientes:

- Modelos de regresión: corresponden al plano (paradigma) explicativo de la ciencia económica
- Modelos autorregresivos: corresponde al plano (paradigma) predictivo de la ciencia económica (ensayo sobre el realismo de los supuestos – Freedman)
- Modelos ARIMA: Varianza homocedástica
- Modelos GARCH: Varianza heterocedástica
- Movimiento Browniano: independencia y normalidad de la distribución

Este último punto, el movimiento browniano, merece especial atención en virtud de ser un ejemplo paradigmático de cómo

modelos originados en las ciencias físicas son aplicados en la ciencia económica. Por ello, ocuparemos el siguiente apartado en hacer un poco de historia y entender conceptualmente en qué consiste el movimiento browniano.

MOVIMIENTO BROWNIANO (SIGLO XIX)

El movimiento browniano es uno de los pilares de la teoría cinética y es característico de los sistemas coloidales, los cuales son un estadio posterior a las denominadas soluciones verdaderas³. En la solución coloidal las partículas no están disueltas a nivel molecular: hay racimos, llamados micelas (ej: granos de polen).

En todos los sistemas, siempre las moléculas del solvente chocan con las del soluto. En una solución verdadera el movimiento es totalmente desordenado e imposible de visualizar porque es a nivel molecular. Pero si la disolución es distinta, generando racimos (micelas) es posible realizar observaciones.

El experimento realizado por Brown consistió en observar en forma frontal granos de polen en agua con luz (iluminación) transversal: observó que la solución estaba en reposo pero las moléculas se movían.

Hasta ese momento no se habían hecho observaciones que pudieran demostrar el movimiento continuo de las moléculas. La

³ Las soluciones verdaderas son soluciones donde el soluto está disuelto a nivel molecular. Por ejemplo, solución de azúcar o sal en agua.

primera prueba experimental de la realidad de los átomos fue la prueba de la teoría atómica proporcionada por los estudios cuantitativos del movimiento browniano.

Básicamente, se observó que el polen suspendido en agua presenta un **movimiento irregular continuo**. En tanto, este movimiento solo se da en moléculas de determinado tamaño (como fue dicho, no en todas las soluciones, como por ejemplo en soluciones verdaderas).

EINSTEIN: TEORÍA DEL MOVIMIENTO BROWNIANO

En un gas, las moléculas están en movimiento todo el tiempo: si hay micelas en el medio también van a recibir choques generados por dichas moléculas; que se muevan va a depender de su tamaño. Respecto a ello, Einstein planteó la siguiente hipótesis: *las partículas que están suspendidas en un líquido o un gas comparten los movimientos térmicos del medio y, en promedio, la energía cinética de cada partícula es $3/2KT$, de acuerdo con el principio de equipartición de la energía.*

La teoría cinética predice cual es la energía cinética media de las partículas en el fluido. Las partículas suspendidas reciben la misma energía cinética media que las moléculas del fluido.

Las partículas suspendidas generalmente son más grandes que las partículas del fluido, siendo continuamente bombardeadas por las

moléculas de este último. Cuando las partículas son más pequeñas (micelas más chicas), o si el fluido es poco concentrado, los choques son muy azarosos. Es decir, si las moléculas son muy grandes o la concentración es alta, el movimiento no es tan azaroso. Esto implica que el movimiento browniano se da en un estadio intermedio:

- ◇ Ni cuando las moléculas son chicas o el fluido es poco concentrado. En este caso el movimiento es muy grande y por lo tanto demasiado azaroso.
- ◇ Ni cuando la concentración del fluido tiende a infinito. En este caso las micelas no se mueven, dado que chocan la misma cantidad de moléculas un lado que del otro.

Finalmente se pueden derivar ecuaciones exactas para esa variación de densidad. Fue Norbert Wiener en 1923 quien dio la primera definición matemática rigurosa del movimiento. Él y Paul Lévy elaboraron el modelo que supone una partícula que en cada instante se desplaza de manera independiente de su pasado: es como si la partícula «olvidara» de dónde viene y decidiese continuamente, y mediante un procedimiento al azar, hacia dónde ir. O sea que este movimiento, a pesar de ser continuo, cambia en todo punto de dirección y de velocidad. Tiene trayectoria continua, pero no tiene tangente en ningún punto. Las dos propiedades básicas que Wiener supuso son:

- Todas las trayectorias deben ser continuas.
- Una vez que fue observada la posición de la partícula en el instante $t=0$ (posición por tanto conocida), su posición (aleatoria) en un instante posterior t' debe estar regido por la ley de Gauss, cuyos parámetros dependen del tiempo t transcurrido.

No obstante, cabe destacar que fue Luis Bachelier quien descubrió el movimiento browniano en el mercado financiero, pero años antes que fuera descubierto en el movimiento de las partículas y décadas antes que de la teoría matemática propuesta por Wiener.

Caben algunos comentarios conclusivos:

- El movimiento browniano determinó, en primera instancia, la existencia de movimiento.
- En segunda instancia, se cualificó el movimiento: irregular continuo
- En tercera instancia, se modelizó y cuantificó el movimiento. Es decir, se derivaron ecuaciones.
- En tanto, el fenómeno se da en un conjunto acotado (nivel de densidad)

En este sentido, sería loable trazar un paralelismo conceptual y no sólo matemático entre la física y la economía. Esto es, proponer no solamente utilizar las ecuaciones de los modelos físicos, sino

también intentar aportar características de análisis cualitativo. Por ejemplo, se podría analizar que los precios de los activos presentan movimiento browniano en mercados de capitales solamente con una determinada concentración. En este caso, habría que definir que se entendería por concentración en un mercado de capitales: tamaño, profundidad, cantidad de acciones cotizantes, etc.

En este sentido, se toma como eje metodológico a la premisa propuesta por Mandelbrot, la cual se basa en la idea que las reglas de las variaciones de los precios no son las mismas en todos los mercados, y por lo tanto un único modelo estadístico no puede describir a todos ellos sin tener que introducir complejizaciones: "es mejor ser aproximadamente correcto que estar certeramente equivocado".

Si bien este trabajo es meramente introductorio, la pregunta subyacente sobre la cual se basa nuestra investigación es **si es posible predecir en economía mediante un modelo matemático.**

En este sentido, en este trabajo introductorio, se aborda el estudio de la teoría del caos, desde una doble perspectiva:

- Su factibilidad conceptual de ser aplicada al ámbito de las finanzas

- Su aplicación empírica, es decir, qué herramienta matemática puede utilizarse para realizar testeos preliminares en series temporales

TEORÍA DEL CAOS

"el desorden se vuelve creador, la simetría se quiebra, los defectos pueden ser fértiles, los desequilibrios son permanentes, y las causas y los efectos se relacionan de forma compleja".

Básicamente, los sistemas caóticos son sistemas deterministas pero que se comportan como si no lo fueran. Esto es, se observa un comportamiento aparentemente aleatorio pero que es generado mediante un modelo determinista, siendo el comportamiento de la variable, "caótico".

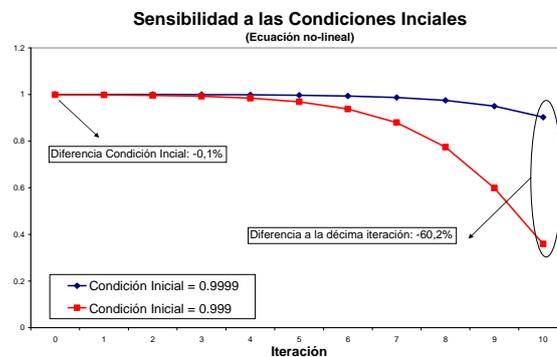
Características de los modelos caóticos

	Chu (2003)	Fernández Díaz
Movimientos aparentemente aleatorios, pero causados por la propia dinámica no lineal.	Es sistema subyacente es no lineal pero sí determinista	Dependencia de las condiciones iniciales
Sensibilidad a las condiciones iniciales	Pueden existir atractores caracterizados por su dimensión fractal	Transitividad o mezclado
Comportamiento aperiódico pero acotado.	Son procesos deterministas	Puntos periódicos densos
	Son sensibles a las condiciones iniciales	

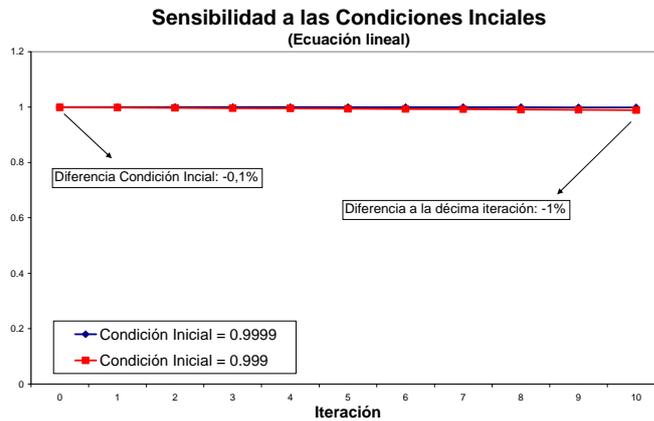
En el apartado siguiente se desarrollan ejemplos sencillos para observar las principales características de los modelos caóticos: no-linealidad, sensibilidad a las condiciones iniciales y atractores.

Sensibilidad a las Condiciones Iniciales, no linealidad, comportamiento acotado y ciclos límite

La idea de sensibilidad a las condiciones iniciales puede observarse rápidamente mediante construyendo una serie cuadrática, la cual surge de fijar un número inicial (condición inicial) y multiplicarlo por sí mismo: $X_{t+1} = X_t^2$



Si el valor inicial se fija en 0.9999, al cabo de 10 iteraciones, el resultado obtenido es 0.90266379. Si el valor inicial se fija en 0.999 (un 0.1% más bajo), al cabo de 10 iteraciones el resultado asciende a 0.358971478 (un 60.2% más bajo).

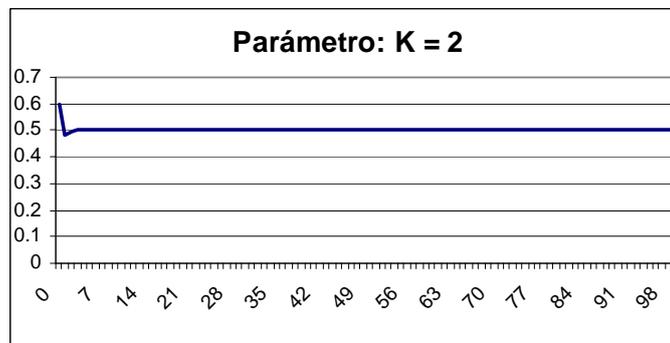
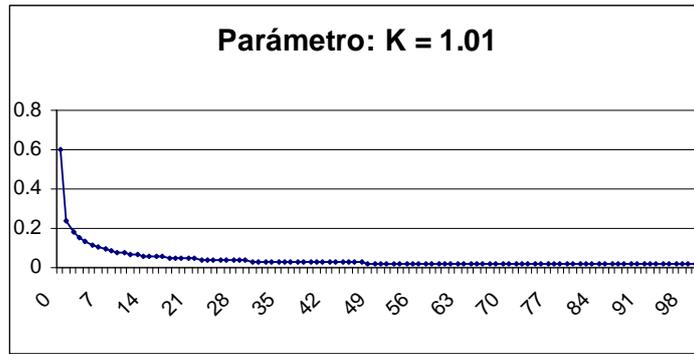


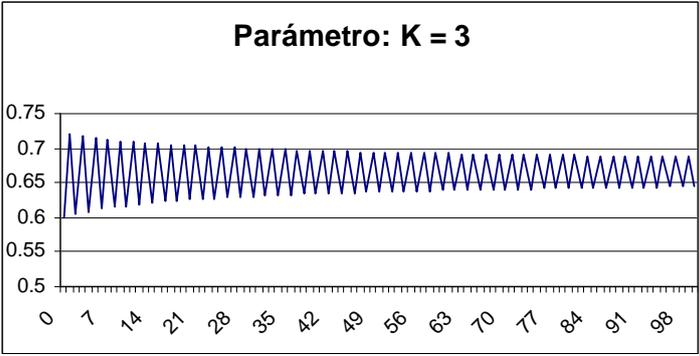
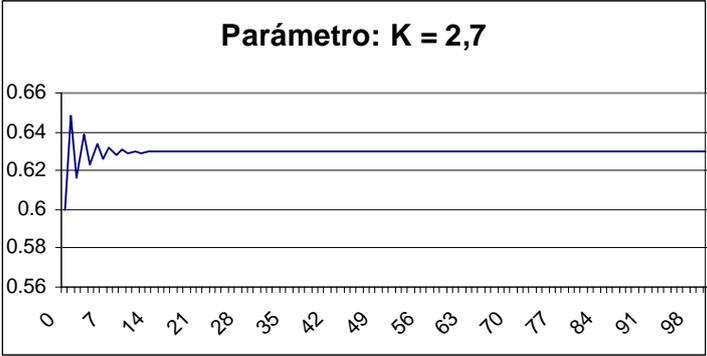
Si el mismo ejercicio se aplica a una función lineal, la discrepancia en un 0.1% en la condición inicial se traduce en una discrepancia de un 1% al cabo de 10 iteraciones. En este caso, el proceso es poco sensible a cambios en las condiciones iniciales.

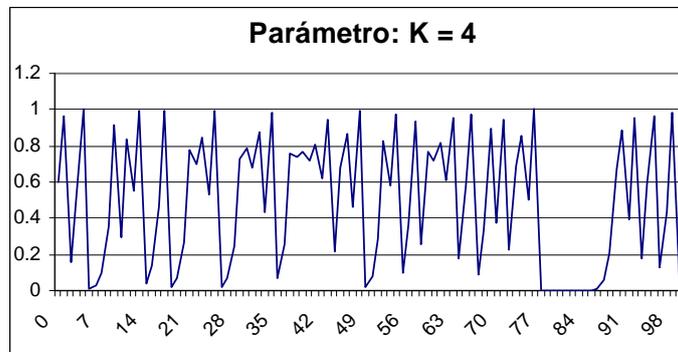
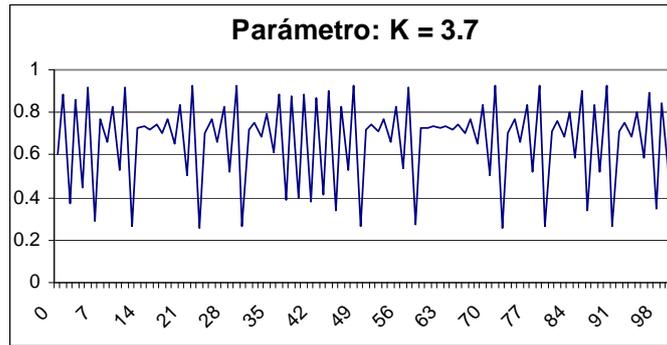
Luego, la combinación de estructuras no lineales y sensibilidad a las condiciones iniciales es uno de los caminos a observar comportamientos caóticos.

Para dar una aproximación a qué se entiende por comportamiento caótico, se utiliza la ecuación logística $X_{t+1} = K * X_t * (1-X_t)$ y se observa su evolución dentro de 100 iteraciones para distintos valores del parámetro "K" con un valor inicial de X de 0.6⁴.

⁴ Se utilizan los ejemplos presentados por Moisés José Sametban, en "Entre el Orden y el Caos: La Complejidad", páginas 111-118.







Como se observa, si se fija el valor del parámetro K en 1.01 la serie rápidamente converge a cero. Si se fija en 2, casi instantáneamente converge a al valor 0.5. Si se fija en 2.7 luego de un par de iteraciones, se estabiliza en el valor 0.63. La convergencia asintótica hacia un punto estable indica que se esta frente a un atractor. Es decir, en los casos anteriores, los valores 0, 0.5 y 0.63 constituyen atractores, dado que atraen el movimiento de la función $X(t)$.

Para $K = 3.3$ presenta un comportamiento distinto: la serie se estabiliza en valores alternados: aproximadamente 0.48 y 0.82 (convergencia a un ciclo límite).

En los casos con valores de $K = 3.7$ y $K = 4$ se llega a un estado caótico, con infinitos valores de X que oscilan en forma imprevisible entre 1 y 0. En tanto, claramente se cumple con dos características: comportamiento aperiódico pero acotado.

En síntesis, se genera un proceso aparentemente aleatorio pero generado por una ley determinista, con determinadas condiciones. Pero lo más importante es ver cómo pueden generarse comportamientos caóticos desde la simplicidad de la ecuación logística presentada. Esto es, buscar la complejidad subyacente dentro de la sencillez aparente.

APLICACIÓN DE LA TEORÍA DEL CAOS EN EL MERCADO DE CAPITALES

En este apartado indagaremos acerca de cuál es el motivo por el cual se decide en este trabajo introductorio analizar el mercado de capitales y no otras variables económicas, tales como el producto bruto, el consumo privado, el ahorro, etc.

En primera instancia, los grandes agregados macroeconómicos como los mencionados parecerían ser los más relacionados a sus fundamentales, y por lo tanto su evolución no presentaría comportamientos tan irregulares como es el caso de variables estrechamente relacionadas a la conducta humana y expectativas.

Entre son los motivos que se pueden enumerar que hacen plausible la aplicación de la teoría del caos en los mercados financieros, pueden mencionarse los siguientes:

- **Inmensidad de variables intervinientes.** Modelos amplios, en contraposición a los modelos amplios pero simplificados tradicionalmente utilizados en economía y a los modelos microscópicos como los estudiados por la física cuántica.
- **Cambios bruscos** (en cantidad y en velocidad), asemejables a los cambios climáticos, disciplina donde la aplicación de la teoría del caos ha sido exitosa. Por ejemplo, caída sustancial en índices bursátiles en pocas horas. Mercados que pasan de la euforia a las depresiones.

- **Sensibilidad a las condiciones iniciales.** Diferencia en condiciones iniciales. Por ejemplo: barrera psicológica en los índices bursátiles (Merval por arriba o por debajo de los 2.000 puntos). El comportamiento cambia según se este en uno u otro lugar: el modelo cambia. Lo mismo sobre el precio de una acción: si esta depreciada o sobrevaluada (fundamentalismo) y/o si la acción ha perforado algún canal, triángulo o tendencia (chartismo). En suma, el punto del cual parte puede ser determinante.
 - Irracionalidad y no determinismo puro:
 - Venta masiva de una acción por un vago rumor de mercado.
 - Salida despavorida de un activo aún cuando sus fundamentals se mantienen intactos.
 - Influencia de operadores ocasionales sin conocimiento del mercado, donde su demanda puede considerarse aleatoria.

Es justamente en este último punto donde gira la idea conceptual de nuestra investigación. Completando o especificando nuestra pregunta-guía: **¿ Es posible predecir en economía mediante modelos matemáticos en variables que pueden tener estrecha vinculación con el comportamiento humano?**

En relación a esta idea, ya han surgido teorías alternativas contrapuestas a las defensoras de la racionalidad, como ser las teorías del comportamiento, que sostienen que los inversores y los operadores se mueven según el contexto y el sesgo propio que cada uno trae, lo cual significa que el analista basa las recomendaciones de inversión según sus prejuicios, creencias, estados de ánimos y otras cuestiones. En síntesis, *"el juego psicológico y emocional está presente todo el tiempo a la hora de decidir dónde invertir"*.

Frente a este escenario, es loable observar comportamientos totalmente aleatorios en determinados ciclos, combinados con cierto determinismo, pero solamente en el largo plazo. En tanto, es totalmente factible que las decisiones de consumo de un individuo estén en el corto plazo influidas más por la emoción que por el ingreso disponible y la tasa de interés, aunque difícilmente el consumo a nivel agregado tenga esta estructura y, por el contrario, sí tenga más relación con sus Fundamentals.

Es por ello que se ha observado factible la aplicación de la teoría del caos al análisis de los mercados financieros en esta primera instancia, para luego pasar a otras variables del ámbito económico.

RESEÑA DE LA LITERATURA

Según Fernández Díaz, el funcionamiento de los mercados de capitales configura un ejemplo típico en el que la aparente

aleatoriedad en las series temporales puede deberse al comportamiento caótico de un sistema no-lineal, pero determinista, que permite llevar a cabo predicciones a corto plazo más precisas que las que podrían realizarse con modelos estocásticos lineales.

Hipótesis clásicas sobre el mercado de capitales:

- **Hipótesis de Mercado Eficiente:** establece que los precios de las acciones reflejan la información tanto en aquellos hechos que han ocurrido como sobre aquellos que el mercado espera que ocurran en el futuro.
- **Hipótesis del Random Walk:** los rendimientos sucesivos son independientes y están idénticamente distribuidos a largo del tiempo. En síntesis, son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, asumiéndose por lo general que siguen una distribución normal.

Cuando se generan fenómenos que contradicen la hipótesis del mercado eficiente, se ha recurrido a una hipótesis ad-hoc, la cual consiste en establecer que en tales casos se han generado "anomalías". Para citar algunos casos:

- Efecto tamaño: empresas pequeñas proporcionan rendimientos superiores que empresas grandes
- Efecto enero: rendimientos anómalos durante el mes de enero en el mercado para firmas pequeñas en comparación con el resto del mercado.

- Efecto sobre-reacción: las cotizaciones reaccionan en exceso a la nueva información que llega al mercado
- Efecto cambio de mes: las acciones generan rendimientos positivos el último día de cada mes y durante la primera quincena del siguiente.

Fernández Díaz resume que para el estudio de series temporales referidas a mercados de capitales concretos se ha utilizado el análisis R/S, que permite comprobar si una serie sigue o no un movimiento browniano y calificarla como persistente o antipersistente. Sostiene que la aplicación de dicho análisis pone de relieve la existencia de estructuras fractales y ciclos no periódicos, comprobándose asimismo que se comportan como sistemas no-lineales, y que la hipótesis de mercado eficiente resulta discutible.

Por su parte, Mandelbrot, en el artículo "*Stable Pareto Random Functions and the Multiplicative Variation of Income*" de 1969, señala que los precios de los activos tienen características bien definidas:

- Sufren grandes saltos que además tienden a agruparse
- Como consecuencia de lo anterior, las desviaciones típicas parecen no estabilizarse; por el contrario, tienden a incrementarse.

- Tales desviaciones parecen invariantes a escala, por lo cual deben de seguir una distribución de tipo hiperbólico, al menos en las colas.

Las consecuencias de lo anterior es que los precios de los activos financieros no se distribuyen de acuerdo a una distribución normal y que por lo tanto no se pueden modelar de acuerdo a un movimiento browniano tal y como señala la Hipótesis del Mercado Eficiente.

Frente a ello, Edgard Peters y Haridas proponen la sustitución de la Hipótesis del Mercado Eficiente por la Hipótesis del Mercado Fractal. Spronk y Trinidad Segovia sintetizan las características de ésta última:

- ***Ineficiencia:*** *La interrelación a través de estructuras no lineales entre los precios de los activos financieros elimina completamente la Hipótesis del Random Walk y por lo tanto el mercado no es eficiente.*
- ***El equilibrio del mercado:*** *No existe un solo equilibrio en el mercado (como supone la Hipótesis del Mercado Eficiente) sino tantos como horizontes temporales tengan los operadores. En el corto plazo se asume que el mercado tiene una estructura fractal, mientras que en el largo plazo esta se convierte en caótica.*

- **Memoria y ciclos en el mercado:** *Los sistemas caóticos son deterministas y retroalimentados, por lo que el mercado tiene memoria de los hechos pasados.*
- **Aleatoriedad Local y Determinismo Global:** *La diferencia fundamental que se suscita entre ambas teorías es que bajo la Hipótesis del Mercado Eficiente no es posible desarrollar predicciones sobre la cual va a ser el comportamiento futuro de los precios, puesto que los mismos se comportan de forma aleatoria. Pero si se asume por el contrario que el mercado no es eficiente y que el sistema subyacente es caótico, existen algunas posibilidades de predicción.*

En síntesis, frente a la no correlación empírica de la hipótesis del mercado eficiente surge del mercado fractal, estrechamente emparentada al comportamiento caótico de las series, cuya principal consecuencia, según algunos autores, es la capacidad de predicción en el corto plazo. No obstante, debe destacarse que la capacidad de predicción estaría limitada al muy corto plazo, dado que una de las conclusiones fundamentales de la teoría del caos es, justamente, la aceptación conceptual de incapacidad de predicción, aún en un modelo cuasi-determinista.

En suma, la evidencia empírica derivada de los análisis realizados mediante la hipótesis del mercado eficiente ha sido tan

contradictoria como aquella devenida del análisis mediante la hipótesis del mercado fractal.

En el apartado siguiente se presentará una metodología preliminar para testear si existe evidencia a favor del comportamiento caótico de una serie temporal. Luego, para culminar, se harán algunos comentarios respecto a dicha metodología.

TESTEO DE COMPORTAMIENTO CAÓTICO

Para testear si existe evidencia de comportamiento caótico en una serie temporal, se sigue el siguiente procedimiento:

En primera instancia se filtra o quita toda la estructura lineal que presente dicha serie. Luego se evalúa, si la parte remanente, arroja evidencia de responder a un modelo no lineal, aunque no se estima dicho modelo.

Si se observa comportamiento no lineal, se procede a analizar si la serie remanente presenta sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para testear la sensibilidad a las condiciones iniciales, se estima el **coeficiente de Liapunov**⁵ de la serie. Si el mismo da un valor positivo, es una evidencia a favor de existencia de dinámica caótica subyacente.

⁵ El exponente de Liapunov cuantifica el crecimiento de errores infinitesimales en el valor inicial $s(t_0)$, dando una medida de la separación de dos trayectorias próximas. El exponente de Liapunov positivo supone una condición necesaria para la existencia de caos.

Las herramientas a utilizar para concretar el procedimiento descrito son las siguientes:

1. Aplicación de un filtro ARIMA o GARCH a una serie mediante la metodología Box y Jenkins
2. Testeo de no linealidad en los residuos mediante el test BDS. Aquí se testea si los residuos del modelo ARIMA-GARCH aplicado, en principio "ruido blanco", presentan algún tipo de estructura no lineal.
3. Si se observa dinámica no lineal, se procede a testear la existencia de comportamiento caótico, testeando la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales estimando el exponente de Liapunov mediante el test NEGM.

TESTEO EN EL MERCADO DE CAPITALES: BOLSA DE VALORES DE BUENOS AIRES

Las series temporales analizadas tienen las siguientes características:

- Cotización diaria de acciones transadas en la bolsa de valores de Buenos Aires, al precio de cierre.
- Muestras: inician hacia el año 1997 y finalizan en la actualidad. Circa 2.500 observaciones.
- Son no estacionarias

Trabajando en diferencias primeras se logran series estacionarias. Las series diferenciadas presentan heteroscedasticidad, por lo cual se han estimado modelos GARCH. En casi la totalidad de los casos, surge de la aplicación del test BDS que los residuos resultantes de aplicar filtros ARIMA y GARCH presentarían no linealidad. Es decir, rechazan la hipótesis nula de serie lineal e idénticamente distribuida contrastada mediante dicho test. En general, el test NEGM arroja coeficiente de Lyapunov negativos, con lo cual se estaría rechazando la hipótesis de comportamiento caótico.

COMENTARIOS

En primera instancia, cabe destacar que el método utilizado, al igual que muchos otros a lo largo de la literatura, combinan el uso del instrumental de la econometría clásica de series de tiempo con la matemática del caos (sensibilidad a las condiciones iniciales, atractores, acotamiento, etc). Luego, se estaría generando una forma de desdoblamiento metodológico, dado que el sólo hecho de aplicar filtros lineales clásicos presuponen normalidad y determinismo subyacente, características ajenas a la dinámica caótica. El motivo por el cual se aplican filtros lineales en el primer paso es que, de no hacerlo, en las series económicas y financieras se generan sesgos en relación a las dimensiones seleccionadas para realizar los testeos.

No obstante, el preconcepto fundamental es que el análisis de fenómenos en el marco o paradigma de la teoría del caos implica que se aborda un estudio sin conocimiento alguno de los parámetros del modelo.

En síntesis, el desafío es que, si se pretende testar o modelizar el comportamiento de series financieras en el marco de la dinámica caótica, sería necesario hacerlo mediante herramientas propias de la matemática del caos, sin la aplicación del análisis tradicional de series temporales. En síntesis, intentar buscar un paralelismo entre la teoría conceptual y el análisis metodológico.

BIBLIOGRAFÍA

Mandelbrot, Benoit (1997), *Fractals and Scaling in Finance*. Ed. Springer.

Ellner, Nychka and Gallant (1992), *LENNS, a program to estimate the dominant Lyapunov exponent of noisy nonlinear systems from time series data*. Institute of Statistics Mimeo Series # 2235, Statistics Department, North Carolina State University.

Belaire-Franch, Contreras-Bayarri (2001), *The BDS Test: A Practitioner's Guide*. Departamento de Análisis Económico, Universidad de Valencia.

Fernández Díaz, Andrés, *Dinámica Caótica en Economía*. Universidad Complutense de Madrid. Mc Graw Hill.

San Miguel, Jesús Miguel, *Movimiento Browniano y Geometría Fractal: El IBEX35*. XIII Jornadas de ASEPUMA. Universidad de Sevilla.

Samentband, Moisés José, *Entre el orden y el caos: la complejidad*. Fondo de Cultura Económica.

Spronk, J., Trinidad Segovia, J. E. (2005), *Más de medio siglo en busca de una teoría sobre los mercados de capitales*. Estudios de Economía Aplicada, vol. 3, número 001, Asociación de Economía Aplicada, Madrid, España.

Jorge, Ariel Nicolás, *Dinámica no lineal y caos en el mercado cambiario: Un análisis empírico para Argentina*. Seminario de Integración y Aplicación, FCE-UBA. 2004.

Balocco, Maradona, *Señal de Caos en series financieras. El spectrum de Lyapunov en el análisis de "sensibilidad a condiciones inic*

Acerca de las representaciones bidimensionales estáticas con distribuciones elípticas y no elípticas en las aplicaciones biométricas y financieras

Alberto H. Landro

Mirta L. González

El tratamiento habitual de los modelos estáticos se basa en los supuestos de la Cowles Commission que se fundan, a su vez, en el concepto de regresión propuesto por F. Galton¹, a partir de los trabajos de Quetelet, L.A.J. (1849) referidos a la extensión de la tradición de la distribución Normal de los errores de observación en astronomía al análisis estadístico de ciertas características sociales (generalización que dio origen a la llamada **física social**)². Los trabajos de Galton fueron extendidos por Pearson, K. (1895)(1896) al ámbito de la biología, en el que halló conjuntos de observaciones con distribución asimétrica y bimodal³. Esta circunstancia y las

¹. Ver Galton, F. (1877)(1885)(1886).

². Ver Landro, A.H. (2002), Spanos, A. (1995).

³. Como muestra de la influencia que la tradición Normal en la distribución de los errores de observación de Quetelet y Galton ejerció sobre los autores posteriores, cabe destacar que en su trabajo

experiencias de Edgeworth, F.Y. (1885) persuadieron a Pearson de que la distribución Normal no era de aplicabilidad tan universal como habían predicado Quetelet y Galton y, como consecuencia, dieron origen a la definición de la hoy conocida como familia de distribuciones de Pearson (la cual incluye a la función Normal y a muchas de las distribuciones que habitualmente se presentan en las aplicaciones como casos particulares) -considerada como uno de sus aportes fundamentales a la biometría- y a la generalización del concepto de regresión a distribuciones conjuntas no-Normales⁴.

A continuación se analizarán las consecuencias que se originan en las representaciones estáticas de aparición más frecuente en las aplicaciones biométricas y de la econometría del mercado financiero, construidas a partir de procesos con distribuciones conjuntas no-Normales, que hacen que, en realidad en estos ámbitos, los supuestos de linealidad y homocedasticidad no sean la regla sino la excepción⁵:

de 1894, K. Pearson intentó justificar estas características a partir de una suma de distribuciones Normales con valores esperados y varianzas diferentes.

⁴. Ver Pearson K. (1904)(1906)(1920)(1923)(1923)(1924)(1925).

⁵. Se puede observar frecuentemente en las aplicaciones el mantenimiento de la hipótesis de Normalidad aún en casos en que la heterocedasticidad admite una representación funcional explícita (ver Spanos, A. (1995)).

1) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) en el que los procesos marginales son estacionarios de segundo orden, con **distribución de probabilidades conjunta $t_{(r)}$** ($r>2$) de la forma⁶:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{(r-2)(r^2\pi)^{-1} \Gamma\left(\frac{r+2}{2}\right)}{\sigma_X \sigma_Y \Gamma\left(\frac{r}{2}\right) \sqrt{1-\rho^2(X_t, Y_t)}} \left\{ 1 + \frac{[1-\rho^2(X_t, Y_t)]^{-1}}{r} [v_t^{-2} + 2\rho(X_t, Y_t)u_t v_t + u_t^2] \right\}^{(r+2)/2}$$

(donde: i) $u_t = (X_t - E(X)) / \sigma_X$; ii) $v_t = (Y_t - E(Y)) / \sigma_Y$). Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / X_t)$ también tienen distribución t. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión será de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = a_0 + a_1 X_t = (m_Y - a_1 m_X) + \frac{\gamma(X_t, Y_t)}{\sigma_X^2} X_t \quad (-\infty < X_t < \infty)$$

y la varianza condicionada:

⁶. Ver Johnson, ; Kotz, (1970).

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \frac{r}{r-1} \left[1 - \rho^2(X_t, Y_t) \right] \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{X_t - m_X}{\sigma_X} \right)^2 \right] \quad (-\infty < X_t < \infty)$$

es una función de X_t , es decir, que el proceso condicionado $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

2) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta exponencial** de la forma⁷:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \left[(1 + \alpha_t)(1 + \theta_t) - \theta \right] e^{-x_t - y_t \alpha_t \theta_t} \quad (x_t \geq 0; y_t \geq 0; \theta > 0)$$

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / x_t)$ también son exponenciales⁸. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión:

⁷. Ver Gumbel, E.J. (1960).

⁸. Las variables Normal, Gamma, Beta, binomial, de Poisson y binomial negativa pertenecen a la familia de las distribuciones exponenciales cuya expresión general es de la forma:

$$f_{y_t}(y_t) = g(\theta) h(y_t) \exp \left[\sum_{j=1}^k g_j^*(\theta) h_j^*(y_t) \right]$$

donde: i) $g(\theta) \geq 0$; ii) $h(y_t) \geq 0$; **iii**) $g_j^*(\theta)$ y $h_j^*(\theta)$ denotan funciones reales (ver Barndorff-Nielsen, O.; Cox, D.R. (1959), Azzalini, A. (1996)).

$$E(Y_t / X_t) = \frac{1 + \theta + \alpha X_t}{(1 + \alpha X_t)^2} \quad (\theta > 0)$$

y la varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \frac{(1 + \theta + \alpha X_t)^2 - 2\theta}{(1 + \alpha X_t)^4} \quad (\theta > 0)$$

son funciones no-lineales de X_t y, por lo tanto, que el proceso condicionado $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico⁹.

3) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta de Pearson-tipo II** de la forma¹⁰:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{r+1}{r+2} \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2(X_t, Y_t)}} \exp\left\{1 - \frac{1}{2(r+2)} \frac{1}{1-\rho^2(X_t, Y_t)} [v_t^2 - 2\rho(X_t, Y_t)u_t v_t + u_t^2]\right\}^r$$

⁹. Debe tenerse en cuenta que esta distribución solamente caracteriza correlaciones negativas.

¹⁰. Ver Pearson, K. (1923), Landro, A.H. (2002).

$(r > 0; |y_t| < \sigma_y \sqrt{2(r+2)}; |x_t| < \sigma_x \sqrt{2(r+2)})$, donde: **i)** $u_t = (X_t - m_x) / \sigma_x$ y **ii)** $v_t = (Y_t - m_y) / \sigma_y$. Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / X_t)$ también tienen distribución de Pearson-tipo II¹¹. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión:

$$E(Y_t / X_t) = a_0 + a_1 X_t = (m_y - a_1 m_x) + \frac{\gamma(X_t, Y)}{\sigma_x^2} \cdot X_t \quad \left(|X_t| < \sigma_x \sqrt{2(r+2)} \right)$$

coincide con las funciones de regresión correspondientes a las distribuciones Normal y t, y la varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \sigma_y^2 \left[1 - \rho^2(X_t, Y_t) \right] \left\{ \frac{1}{2r+3} \left[1 - \left(\frac{X_t - m_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \right\}$$

es función de X_t y, por lo tanto, que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico con rango finito¹².

¹¹. Esta distribución, como las de Cauchy y la de Student bidimensionales, corresponde al tipo iii), de acuerdo con el método de Pearson-Pretorius-Van Uden.

¹². Las distribuciones Normal, t y de Pearson-tipo II pertenecen a la familia de las funciones elípticamente simétricas las cuales, a excepción de la Normal, son heterocedásticas (ver Spanos, A. (1999)).

4) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta de Pareto** de la forma:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{\delta(\delta+1)(\alpha\beta)^{\delta+1}}{(\alpha x_t + \beta y_t - \alpha\beta)^{\delta+2}} \quad (x > \beta > 0; y > \alpha > 0; \delta > 0)$$

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada:

$$f(Y_t / X_t) = \frac{(\delta+1)\beta(\alpha x_t)^{\delta+1}}{(\alpha x_t + \beta y_t - \alpha\beta)^{\delta+2}}$$

son funciones de Pareto. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión es de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = \beta + \left(\frac{\beta\delta}{\alpha}\right)X_t$$

y la varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \frac{1+\delta}{(1+\delta)^2} X_t^2$$

es función de X_t y, por lo tanto, que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

5) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con

distribución de probabilidades conjunta logística de la forma¹⁴:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{e^{-(x_t + y_t)}}{(1 + e^{-x_t} + e^{-y_t})} \quad (-\infty \leq x_t \leq \infty; -\infty \leq y_t \leq \infty)$$

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada son funciones logísticas. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión:

$$E(Y_t / X_t) = 1 - \ln \left[1 + e^{-(X_t - m_X) / \sigma_X} \right]$$

es no-lineal y la varianza condicionada es de la forma:

¹⁴. Ver Gumbel, E.J. (1960).

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \frac{\pi^2}{3} - 1$$

es decir, que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es homocedástico.

6) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\} (t=1,2,\dots)$ con **distribución de probabilidades conjunta Beta** de la forma¹⁵:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{\Gamma(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)}{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)\Gamma(\theta_3)} x_t^{\theta_1-1} y_t^{\theta_2-1} (1-x_t-y_t)^{\theta_3-1}$$

$$(\theta_1 > 0; \theta_2 > 0; \theta_3 > 0; x_t \geq 0; y_t \geq 0; x_t + y_t \leq 1)$$

Se demuestra que la función de regresión es lineal:

$$E(Y_t / X_t) = \frac{\theta_2}{\theta_2 + \theta_3} (1 - X_t) \quad (\theta_2 > 0; \theta_3 > 0; 0 \leq X_t \leq 1)$$

y, dado que el coeficiente de correlación lineal es de la forma:

¹⁵. Ver Isserlis, L. (1916), Pearson, K. (1923).

$$\rho(X_t, Y_t) = -\sqrt{\frac{\theta_2 \theta_3}{(\theta_1 + \theta_3)(\theta_2 + \theta_3)}}$$

que su pendiente es función de $\rho(X_t, Y_t)$. La varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \frac{\theta_2 \theta_3}{(\theta_2 + \theta_3)^2 (1 + \theta_2 + \theta_3)} (1 - X_t)^2$$

$$(\theta_1 > 0; \theta_2 > 0; \theta_3 > 0; 0 \leq X_t \leq 1)$$

es función de X_t , de modo que se puede concluir que el proceso

$\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástica.

7) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con

distribución de probabilidades conjunta Gamma de Kibble
de la forma¹⁶:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{\theta_1^{-(\theta_2 - 1)/(1 - \theta_1)}}{\Gamma(\theta_2)(1 - \theta_1)} e^{-(x_t + y_t)/(1 - \theta_1)} (x_t y_t)^{-(\theta_2 - 1)/2} I_{\theta_2 - 1} \left(\frac{2\sqrt{\theta_1 x_t y_t}}{1 - \theta_1} \right)$$

$$(0 \leq \theta_1 \leq 1; \theta_2 > 0; x_t \geq 0; y_t \geq 0)$$

¹⁶. Ver Kibble, W.F. (1970) y Johnson, N.L.; Kotz, S. (1970).

donde $I_r(\cdot)$ denota una función de Bessel modificada de la forma¹⁷:

$$I_r(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^{n-2j} \frac{1}{j! \Gamma(n * j - 1)}$$

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / X_t)$ también son funciones Gamma de Kibble. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión es de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = \theta_2(1 - \theta) + \theta X_t \quad (0 < \theta < 1; \theta_2 > 0)$$

y que la varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = (1 - \theta) [\theta_2(1 - \theta) + 2\theta X_t] \quad (X_t > 0)$$

es función de X_t y, por lo tanto, que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

¹⁷. Ver Muirhead, R.J. (1982).

8) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta Gamma de Cherian** de la forma¹⁸:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{e^{-(x_t + y_t)}}{\Gamma(\theta_0)\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta_2)} \int_0^{\min(x_t, y_t)} e^u u^{\theta_0 - 1} (x_t - u)^{\theta_1 - 1} (y_t - u)^{\theta_2 - 1} du$$

$$(\theta_0 > 0; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0; x_t \geq 0; y_t \geq 0)$$

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / X_t)$ también son funciones Gamma de Cherian.

Se puede concluir, entonces, que la función de regresión es lineal:

$$E(Y_t / X_t) = \theta_2 + \frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1} X_t \quad (\theta_0 > 0; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0; X_t > 0)$$

y, dado que el coeficiente de correlación lineal es de la forma:

$$\rho(X_t; Y_t) = \frac{\theta_0}{\sqrt{(\theta_0 + \theta_1)(\theta_0 + \theta_2)}}$$

¹⁸. Ver Cherian, K.C. (1941).

que su pendiente es una función directa de $\rho(X_t, Y_t)$. La varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \theta_2 + \frac{\theta_0 \theta_1}{(\theta_0 + \theta_1)^2 (1 + \theta_0 + \theta_1)} X_t^2 \quad (X_t > 0)$$

es función de X_t ¹⁹, de modo que se puede concluir que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

9) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta Gamma de McKay** de la forma²⁰:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{a^{\theta_1 + \theta_2}}{\Gamma(\theta_1) \Gamma(\theta_2)} e^{-ax_t} x_t^{\theta_1 - 1} (y_t - x_t)^{\theta_2 - 1} \quad (a > 0; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0; y_t > x_t \geq 0)$$

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / X_t)$ son funciones Gamma de McKay²¹. Se puede

¹⁹. Obsérvese que la curvatura de $\sigma^2(Y_t / X_t)$ es una función directa de $\rho(X_t, Y_t)$

²⁰. Ver McKay, A.T. (1934).

concluir, entonces, que la función de regresión y la varianza condicionada son de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = \frac{\theta}{a} + X_t \quad (a > 0; \theta > 0; X_t > 0)$$

$$\sigma^2(Y_t / X) = \frac{\theta}{a^2} \quad (X_t > 0)$$

Es decir que, en este caso, el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es homocedástico²².

10) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta** \square de la forma²³:

²¹ . La distribución condicionada $f(X_t / Y_t)$ es una función Beta. Debe tenerse en cuenta que esta distribución bidimensional no es simétrica con respecto a las variables X_t e Y_t . Esta distribución corresponde al tipo iv), de acuerdo con el método de Pearson-Pretorius-Van Uden.

²² . Debe tenerse en cuenta que:

$$E(X_t / Y_t) = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} Y_t \quad (Y_t > X_t; a > 0; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0)$$

$$\sigma^2(X_t / Y_t) = \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2)^2 (1 + \theta_1 + \theta_2)} Y_t^2 \quad (Y_t > X_t > 0)$$

y, por lo tanto, que el proceso $\{X_t / Y_t\}$ es heterocedástico.

²³ . Ver Johnson, N.L.; Kotz, S. (1970).

$$f_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) = \frac{\theta_1^{a/2} \theta_2^{a/2}}{\Gamma\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{\theta_0 + \theta_1 + \theta_2}{2}\right) \frac{x_i^{(a/2)-1} y_i^{(a/2)-1}}{(\theta_0 + \theta_1 x_i + \theta_2 y_i)^{(a\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)/2}}$$

($\theta_0 > 0; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0; x_i > 0; y_i > 0$).

Se demuestra que la función de regresión es lineal²⁴:

$$E(Y_i / X_i) = \frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 - 2} + \frac{\theta_1}{\theta_0 + \theta_1 - 2} X_i \quad (\theta_0 > 0; \theta_1 > 0; \theta_2 > 0; X_i > 0)$$

y, dado que el coeficiente correlación lineal es de la forma:

$$\rho(X_i, Y_i) = \sqrt{\frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_0 + \theta_1 - 2)(\theta_0 + \theta_2 - 2)}}$$

que la pendiente es una función directa de $\rho(X_i, Y_i)$. La varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_i / X_i) = \frac{2(\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 - 2)}{\theta_2(\theta_0 + \theta_1 - 4)(\theta_0 + \theta_1 - 2)^2} (\theta_0 + \theta_1 X_i)^2 \quad (X_i > 0; \theta_1 + \theta_2 > 4)$$

²⁴. Esta distribución como la distribución Beta y de Pareto bidimensionales corresponden al tipo i) de acuerdo con el método de Pearson-Pretorius_Van Uven.

es función de X_t y su curvatura es función directa de $\rho(X_t, Y_t)$, de modo que se puede concluir que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

11) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1,2,\dots$) con **distribución de probabilidades conjunta multinomial** de la forma²⁵:

$$f_{x_t, y_t}(x_t, y_t) = \frac{n!}{x_t! y_t! (n - x_t - y_t)!} \theta_1^{x_t} \theta_2^{y_t} (1 - \theta_1 - \theta_2)^{n - x_t - y_t}$$

$$(x_t, y_t = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq \theta_1 \leq 1; 0 \leq \theta_2 \leq 1; x_t + y_t \leq n).$$

Se demuestra que la función de regresión es de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = \theta_2 (1 - \theta_1) (n - X_t)$$

$$(0 < \theta_1 < 1; 0 < \theta_2 < 1; n = 1, 2, \dots; \theta_1 + \theta_2 < 1; X_t = 0, 1, 2, \dots)$$

y la varianza condicionada:

²⁵ . Ver Johnson, N.L.; Kotz, S. (1970).

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \frac{\theta_2(1 - \theta_1 - \theta_2)}{1 - \theta_1}(n - X_t)$$

$$(0 < \theta_1 < 1; 0 < \theta_2 < 1; n = 1, 2, \dots; \theta_1 + \theta_2 < 1; X_t = 0, 1, 2, \dots)$$

es función de X_t . De modo que se puede concluir que el proceso

$\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástica.

12) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1, 2, \dots$) con **distribución de probabilidades conjunta de Poisson** de la forma²⁶:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{(\theta_1 - \theta_3)^{x_t} (\theta_2 - \theta_3)^{y_t}}{x_t! y_t!} \exp(-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3) \sum_{j=0}^{\min(x_t, y_t)} \frac{x_t^{(j)}}{(\theta_1 - \theta_3)^{(j)}} \frac{y_t^{(j)}}{(\theta_2 - \theta_3)^{(j)}} \frac{\theta_3^j}{j!}$$

$$\theta_1 > \theta_3 > 0; \theta_2 > \theta_3 > 0; x_t^{(j)} = x_t(x_t - 1) \dots (x_t - j + 1); y_t^{(j)} = y_t(y_t - 1) \dots (y_t - j + 1);$$

$$(\theta_h - \theta_3)^{(j)} = (\theta_h - \theta_3)(\theta_h - \theta_3 - 1) \dots (\theta_h - \theta_3 - j + 1)$$

²⁶. Ver Johnson, N.L.; Kotz, S. (1970).

Se demuestra que las distribuciones marginales y la distribución condicionada $f(Y_t / X_t)$ son funciones de Poisson. Se puede concluir, entonces, que la función de regresión es de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = (\theta_2 - \theta_3) + \frac{\theta_1}{\theta_3} X_t \quad (\theta_1 > 0; \theta_2 > 0; \theta_3 > 0; X_t = 0, 1, 2, \dots)$$

y la varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = (\theta_2 - \theta_3) + \frac{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3}{\theta_1^2} X_t \quad (\theta_3 < \min(\theta_1, \theta_2); X_t = 0, 1, 2, \dots)$$

es función de X_t y, por lo tanto, que el proceso $\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

13) Sea un proceso bidimensional $\{X_t, Y_t\}$ ($t=1, 2, \dots$) con **distribución de probabilidades conjunta multinomial negativa** de la forma²⁷:

$$f_{X_t, Y_t}(x_t, y_t) = \frac{(x_t + y_t + k - 1)!}{x_t! y_t! k!} \theta_1^{x_t} \theta_2^{y_t} (1 - \theta_1 - \theta_2)^k$$

²⁷ . Ver Johnson, N.L.; Kotz, S. (1970), Pearson, K. (1924).

$$(0 < \theta < 1; 0 < \theta_2 < 1; \theta + \theta_2 < 1; x_t, y_t = 0, 1, 2, \dots; k > 0).$$

Se demuestra que la función de regresión es de la forma:

$$E(Y_t / X_t) = \frac{\theta_2}{1 - \theta_2} (\theta + X_t) \quad (\theta > 0; 0 < \theta_2 < 1; X_t = 0, 1, 2, \dots)$$

y la varianza condicionada:

$$\sigma^2(Y_t / X_t) = \frac{\theta_2}{(1 - \theta_2)^2} (\theta + X_t) \quad (X_t = 0, 1, 2, \dots)$$

es función de X_t , de modo que se puede concluir que el proceso

$\{Y_t / X_t\}$ es heterocedástico.

De las demostraciones precedentes surge que, en el caso de representaciones de procesos con distribuciones conjuntas no simétricamente elípticas, es necesario considerar (además de la esperanza matemática y la varianza condicionadas, es decir, las funciones de regresión y de heterocedasticidad) el comportamiento de momentos condicionados de orden superior como la asimetría y la

kurtosis (es decir, las funciones clítica y kúrtica, en la nomenclatura de K. Pearson)²⁸.

²⁸. Ver Pearson, K. (1905).

BIBLIOGRAFÍA

- Azzalini, A.: "Statistical inference: Based on the likelihood". Chapman & Hall, 1996.
- Barndorff-Nielsen, O.; Blaesild, P.: "Global maxima and likelihood in linear models". Res. nº 57, Dept. Theoretical Statistics, Aarhus University, 1980.
- Cherian, K.C.: "A bivariate correlated gamma-type distribution function". Journal of the Indian Mathematical Society, vol. 5, 1941.

- Edgeworth, F.Y.: "Observations and statistics: an essay on the theory of error of observation and the first principles of statistics". Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 14, 1885.
- Galton, F.: "Typical laws of heredity". Proceedings of the Royal Institution of Great Britain, vol. 8, 1877.
- Galton, F.: "Regression towards mediocrity in hereditary stature". Journal of the Antropological Institute, vol. 14, 1885.
- Galton, F.: "Family likeness in stature". Proceedings of the Royal Society, vol. 40, 1886.
- Gumbel, E.J.: "Bivariate exponential distributions". JASA, vol. 55, 1960.

- Isserlis, L.: "On certain probable error and correlation coefficients of multiple frequency distributions with skew regression". *Biometrika*, vol. 11, 1916.
- Johnson, N.L.; Kotz, S.: "Continuous univariate distributions". Wiley, 1970.
- Kibble, W.F.: "A two-variate gamma type distribution". *Sankhā*, vol. 5, 1941.
- Landro, A.H.: "Acerca de la probabilidad". Ediciones Cooperativas, 2002.
- McKay, A.T.: "Sampling from batches". *JRSS, Serie B*, vol. 1, 1934.
- Muirhead, R.J.: "*Aspects of multivariate statistical theory*". Wiley, 1982.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, I: On the dissection of asymmetrical frequency curves". *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, vol. 185, 1894.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, II: Skew variation in homogeneous material". *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, vol. 186, 1895.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, III: Regression, heredity and panmixia". *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, vol. 187, 1896.

- Pearson, K.: "On the dissection of asymmetrical frequency curves". *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, vol. 185, 1894.
- Pearson, K.: "On a criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables in such that it can be reasonably supposed to have arisen in random sample". *Philosophical Magazine*, vol. 50, 1900.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, VII: On the correlation of characters not quantitatively measurable". *Philosophical Transactions of the Royal Society, Serie A*, vol. 195, 1901.
- Pearson, K.: "On the systematic fitting of curves to observations and measurement". *Biometrika*, vol.1, 1902.

- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, VIII: On homotyposis in homologous but differentiated organs". *Proceedings of the Royal Society*, vol. 71, 1903.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, XIII: On contingency and its relation to association and normal correlation". *Drapers' Company Research Memoirs, Biometric Series, I*, 1904.
- Pearson, K.: "Contributions to the mathematical theory of evolution, XIV: On the general theory of skew correlation and non-

linear regression". Drapers' Company Research Memoirs, Biometric Series, II, 1905.

- Pearson, K.: "On a new method of determining correlation when one variable is given by alternative and the other by multiple categories". Biometrika, vol. 7, 1910.

- Pearson, K.: "Notes on the history of correlation". Biometrika, vol. 13, 1920.

- Pearson, K.: "Notes on skew frequency surfaces". Biometrika, vol. 15, 1923.

- Pearson, K.: "Notes on non-skew frequency surfaces". Biometrika, vol. 15, 1923.

- Pearson, K.: "On a certain double hypergeometric series and its representation by continuous frequency surfaces". Biometrika, vol. 16, 1924.

- Pearson, K.: "The fifteen constant bivariate frequency surface". Biometrika, vol. 17, 1925.

- Perks, W.F.: "On some experiments in the graduation of mortality statistics". Journal Institute of Actuaries, vol. 58, 1932.

- Spanos, A.: "On the theory testing in econometrics: modelling with non experimental data". Journal of Econometrics, vol. 67, 1995.

- Spanos, A.: "*Probability theory and statistical inference*". Cambridge University Press, 1999.

COSTO FINANCIERO IMPLÍCITO EN LA FINANCIACIÓN

María Alejandra Metelli

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es comparar el costo financiero implícito en un plan de ahorro con relación al correspondiente a un préstamo amortizable mediante el denominado sistema francés.

A tal fin, se enuncian en primer lugar las características de un plan de ahorro correspondiente a grupos cerrados sin reposición: que adjudican bienes muebles

- La cantidad de suscriptores dentro de un grupo es equivalente al duplo de meses de duración del plan.
- Todos los suscriptores dentro de un grupo han seleccionado el mismo valor móvil.
- Se entiende por valor móvil el precio del bien en cada uno de los meses.

- Cada suscriptor abona un derecho de suscripción al momento de adherir al plan.
- Mensualmente, cada suscriptor abona una cuota comercial que comprende: cuota pura – precio del bien al momento de ingreso de la cuota dividido cantidad de meses de duración del plan - , cargas administrativas, seguros e impuestos que correspondieran.
- Con la recaudación en concepto de cuotas puras, la sociedad adjudica bienes por sorteo y licitación.
- La cantidad de bienes a adjudicar mensualmente dependerá de las disponibilidades del fondo de adjudicación y reintegros, que se forma con la recaudación mensual y los excedentes que pudieran existir de meses anteriores.

Es decir, el momento en el cual el suscriptor puede resultar adjudicado en un plan de ahorro es aleatorio mientras que, si se solicita un préstamo es el individuo quien determina la fecha en la cual quiere acceder al bien.

SUPUESTOS CONSIDERADOS

Se han tenido en cuenta las siguientes hipótesis para la determinación de los costos financieros:

PLAN DE AHORRO

- ❖ El valor suscrito se estima en \$ 12.000.-
- ❖ El derecho de suscripción se estima en 3 % sobre el valor suscrito.
- ❖ La variación mensual del valor suscrito se establece en 1% y 2 %, respectivamente.
- ❖ Las cargas administrativas se establecen en 5% y 8%, respectivamente.
- ❖ Los plazos se fijan en 24 y 48 meses.
- ❖ Se analizan distintas alternativas de adjudicación: meses uno, seis y doce, respectivamente.

- ❖ El derecho de adjudicación es equivalente al 1 % del precio del bien al momento de la adjudicación.

SISTEMA FRANCÉS

- ❖ El préstamo se solicita en el mes en que se supone es adjudicado mediante la alternativa del plan de ahorro.
- ❖ El valor que se entrega en préstamo es el equivalente al que le entregan mediante la alternativa del plan de ahorro.
- ❖ El importe solicitado en préstamo, entonces, resulta de incrementar la suma previamente mencionada en el porcentaje correspondiente a gastos de otorgamiento.
- ❖ Los gastos de otorgamiento se estiman en un 3 % del valor otorgado en préstamo.
- ❖ Las cargas administrativas se establecen en un 15 %.
- ❖ La tasa de interés se fija en el 21 % efectivo anual.

- ❖ El plazo de reembolso se fija en 24 y 48 meses, respectivamente, contados a partir del otorgamiento del crédito.

No se han tenido en cuenta las cuotas correspondientes a seguros en ninguna de las dos alternativas de financiación.

DETERMINACIÓN DEL FLUJO DE FONDOS CORRESPONDIENTE AL PLAN DE AHORRO.

Se muestra el flujo de fondos correspondientes a un plan de ahorro de 24 meses de duración considerando una variación mensual del precio del bien del 2 % y cargas administrativas del 8 %.

No se muestra en el flujo de fondos la recepción del importe correspondiente al bien ni el desembolso en concepto de derecho de adjudicación dado que las mismas son aleatorias en el tiempo, depende del momento en que el suscriptor resulte adjudicado.

MES	CUOTAS
0	360,00
1	550,80
2	561,82
3	573,05
4	584,51
5	596,20
6	608,13
7	620,29
8	632,70
9	645,35
10	658,26
11	671,42
12	684,85
13	698,55
14	712,52
15	726,77
16	741,30
17	756,13
18	771,25
19	786,68
20	802,41
21	818,46
22	834,83
23	851,53
24	868,56

En similar forma pueden obtenerse los distintos flujos de fondos correspondientes a los distintos supuestos.

COSTO FINANCIERO IMPLÍCITO EN EL PLAN DE AHORRO

Los cuadros siguientes muestran los resultados obtenidos a partir de cada uno de los supuestos mencionados:

Variación mensual 1 % , cargas administrativas 5 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	1,8057%	1,3930%
SEIS	2,5346%	1,5090%
DOCE	43,7737%	1,8010%

Variación mensual 1 % , cargas administrativas 8 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	2,0661%	1,5190%
SEIS	3,0663%	1,6760%
DOCE	42,9914%	2,0790%

Variación mensual 2 % , cargas administrativas 5 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	2,8137%	2,3970%
SEIS	3,5498%	2,5140%
DOCE	45,1972%	2,8090%

Variación mensual 2 % , cargas administrativas 8 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	3,0767%	2,5240%
SEIS	4,0867%	2,6820%
DOCE	44,4072%	3,0900%

COSTO FINANCIERO IMPLÍCITO AL SOLICITAR UN PRÉSTAMO

Los cuadros siguientes muestran los resultados obtenidos a partir de cada uno de los supuestos mencionados:

Variación mensual 1 % , cargas administrativas 5 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	3,1075%	2,4150%
SEIS	3,1075%	2,4150%
DOCE	3,1075%	2,4150%

Variación mensual 1 % , cargas administrativas 8 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	3,1075%	2,4150%
SEIS	3,1075%	2,4150%
DOCE	3,1075%	2,4150%

Variación mensual 2 % , cargas administrativas 5 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	3,1075%	2,4150%
SEIS	3,1075%	2,4150%
DOCE	3,1075%	2,4150%

Variación mensual 2 % , cargas administrativas 8 %

MES DE ADJUDICACION	PLAN 24 MESES	PLAN 48 MESES
UNO	3,1075%	2,4150%
SEIS	3,1075%	2,4150%
DOCE	3,1075%	2,4150%

CONCLUSIONES

Del análisis de los resultados precedentes, se observa que el costo financiero implícito en el plan de ahorro:

- ✚ Aumenta a medida que el mes de adjudicación se aleja del momento de contratación.
- ✚ Disminuye a medida que aumenta el plazo de vigencia o duración.
- ✚ Aumenta a medida que aumenta el porcentaje de variación mensual en el precio del bien.
- ✚ Aumenta a medida que aumenta el porcentaje de cargas administrativas.

Mientras que el costo financiero implícito correspondiente al préstamo:

- ✚ No depende del momento de adjudicación. Se otorga un préstamo en un momento dado cancelable mediante cuotas

constantes pagaderas a partir del mes siguiente al momento de otorgamiento.

- ✚ No depende del porcentaje de variación mensual del precio del bien dado que sólo interesa la suma que se ha dado en préstamo.
- ✚ Disminuye a medida que aumenta la cantidad de cuotas en que se cancela.
- ✚ La igualdad en los costos se debe a que siempre ha sido considerado el mismo porcentaje de cargas administrativas.

Puede observarse que, en la mayoría de las situaciones, conviene solicitar un préstamo a pesar de que el porcentaje de cargas administrativas incluido en las cuotas supera ampliamente a las correspondientes al plan de ahorro.

FINANZAS SOBRE UNA BASE ECONÓMICA CAÓTICA⁶

Gustavo Norberto Tapia

INTRODUCCIÓN. DINÁMICA DE MERCADOS

En base al análisis económico de lo elemental se puede y se deben buscar -en lo que los físicos llaman un "espacio de fases"- los denominados "atractores", tan usados en las actuales teorías del caos, para identificar en los distintos puntos del tiempo y del espacio las correspondientes pautas comunes de comportamiento de los agentes económicos. Esto constituye una base fundamental para edificar de abajo hacia arriba la política y el sistema de decisiones en las Organizaciones. Resulta necesario tratar de identificar y de comprender, la naturaleza y forma de actuar de los distintos "genes" del sistema económico, a fin de llegar a descifrar las pautas de actuación y las regularidades del genoma económico; ello nos permitiría explicar mínimamente el comportamiento elemental de cada uno de esos genes, para poder así inducir una actuación coordinada y eficiente de los mismos, con la consecuente

⁶ El presente trabajo se encuentra dentro del proyecto de investigación UBACyT E012 "Evaluación de riesgos financieros extremos en mercados emergentes con énfasis en la argentina" dirigido por la Dra. María Teresa Casparri, desarrollado en el Centro de Investigaciones en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y Gestión (CMA), perteneciente a la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires

minimización de las disfunciones individuales que dan lugar a las inoperancias globales del sistema económico en su conjunto.

Los precios de los activos financieros son el resultado de una infinidad de interacciones imposibles de resumir de forma sencilla. Por ello, aún considerando que responden a una lógica económica, resultan imposibles de estudiar con precisión. Esta imposibilidad de estudio se presenta de forma evidente cuando de predecir un precio se trata afectando a toda la doctrina económica que intenta explicar los fenómenos de formación de precios. Sin embargo, cuesta creer que los procesos económicos, y en particular los procesos de formación de precios de los activos financieros, respondan a una absoluta falta de lógica. La experiencia parece mostrar una relación coherente entre diversos procesos, aunque esta coherencia sea cambiante o aparezca y desaparezca en distintos momentos. En este sentido se suele recurrir a la explicación sobre el largo plazo, en la que se señala la existencia de un proceso coherente, por sobre el ruido del corto plazo.

Resultará más fácil entender el problema si lo enfocamos de forma general a partir de la caracterización de los procesos, tal como se comienza a vislumbrar desde hace unas décadas. Definidas las características de los procesos, y en particular las de los de

formación de precios de activos financieros, podremos saber si la pregunta sobre la coherencia de los mercados es planteable.

CARACTERIZACIÓN DE PROCESOS

Los procesos observados son resultados de una teoría en la que luego de la medición, obtenemos una serie de números que tendremos que analizar. Si las posteriores observaciones, es decir, si las series de números posteriores no concuerdan con la teoría, entonces la teoría será desechada. Se requiere trabajar de partida con una teoría de procesos que permita definir sus tipos en los que pueden encajar las observaciones. El convencimiento subyacente a todo el pensamiento científico, era que todo proceso era determinista, y el azar era simplemente el resultado de nuestro desconocimiento preciso de la realidad. Este punto de vista, denominado mecanicista, había sufrido cuestionamientos procedentes de la física (principio de incertidumbre de Heisenberg y mecánica cuántica), de las matemáticas (teorema de incompletitud de Goedel) y de la astronomía (el problema de los tres cuerpos, ya planteado por Newton). Sin embargo, el paradigma mecanicista ha calado tanto en nuestra forma de ver el mundo que resulta realmente difícil escapar a él. A pesar de ello, podemos establecer una primera caracterización de procesos atendiendo a su grado de predictibilidad:

Si lanzamos una piedra y medimos los puntos de su trayectoria, podremos determinar dónde estará la piedra un tiempo después. La trayectoria de la piedra es totalmente predecible; después de lanzar muchas piedras y medir sus trayectorias podemos establecer una teoría sobre como se mueven las piedras. Podemos predecir dónde estará la piedra y, tan importante como ello, donde no estará.

Este tipo de procesos caracterizados por tener una predictibilidad conceptual de 100% se denominan procesos deterministas. El segundo gran grupo está formado por los procesos aleatorios. En ellos no sabemos dónde estaremos, pero podemos medir la probabilidad de estar en algún punto determinado. Aquí la primera certeza absoluta es que alguna vez estaremos en ese punto; y una segunda certeza absoluta: pasaremos por todos los puntos posibles en algún momento (Vg. juego de la ruleta); tenemos una predictibilidad probabilística. En un tercer grupo, no podemos medir la probabilidad de estar en un punto y no sabemos si podemos pasar por un punto determinado; son procesos caóticos. La informática ha permitido estudiar un tipo especial de subprocesos de este tercer grupo denominado caos determinista.

Aunque esta clasificación de procesos nos ayuda a estudiar la formación de precio de un activo financiero, estamos todavía lejos de poder utilizarla. La calificación del proceso no resulta evidente. Para acercarnos más a esa calificación hemos de dar un paso relativamente sencillo, que permita estimar si existe o no cierto grado de predictibilidad. Para ello recurrimos a una forma intuitiva de ver el proceso que estamos estudiando, empleando gráficos de la serie numérica. Desde este punto de vista las series pueden ser de tres tipos:

Series antipersistentes: se llaman a sí a las que cambian continuamente de dirección, no manteniendo ninguna tendencia. Los cambios de dirección pueden ser relativamente estables, manteniendo una caracterización estadística clara (procesos de retorno a la media), pero no tiene por qué ser así (series antipersistentes inestables).

Series aleatorias: mantienen tendencias que cambian de dirección mediante cambios graduales, sin que existan saltos importantes.

Series persistentes: mantienen tendencias que acaban de forma abrupta, mediante saltos importantes y con tendencias que suelen ser muy largas.

Estos tres tipos de series responden a procesos conceptualmente distintos y pueden en algunos casos calcularse el coeficiente de Hurst (H) que caracterizará el tipo de proceso.

Procesos sin ninguna memoria del pasado: series antipersistentes;
 $H < 0,50$.

Procesos con memoria del pasado reciente: series aleatorias;
 $H = 0,50$.

Procesos con memoria del pasado lejano: series persistentes;
 $H > 0,50$.

La primera clasificación de procesos atiende a la predictibilidad y a la estructura, mientras que la segunda considera a la memoria del proceso. Entonces, los procesos pueden clasificarse en función de la memoria, la predictibilidad y la estructura. Según esta clasificación, los procesos de formación de precios podrían clasificarse teniendo en cuenta que tienen memoria, aunque todavía no sabemos si de largo o corto plazo, si son impredecibles y si deberían estar dotados de cierta estructura.

La discusión sobre si los procesos de formación de precios tienen memoria del pasado reciente, lo que les conduciría a ser procesos aleatorios, o del pasado lejano, lo que les conduciría a ser procesos persistentes, no ha sido resuelta. La teoría tradicional considera que

son procesos aleatorios, lo que permite su estudio estadístico; la modelización de precios de opciones de Black-Scholes, la teoría moderna de gestión de Sharpe y la disminución del riesgo por covarianzas de Markowitz, son ejemplos de este punto de vista, por más que sus fracasos prácticos la pongan continuamente en cuestión. Adicionalmente, en el análisis de la predictibilidad se presenta el inconveniente de la falta de instrumentos de análisis para el caso de encontrarnos ante procesos con memoria del pasado lejano, lo que hace que, de momento, no se pueda siquiera evaluar la predictibilidad salvo en el caso de proceso aleatorio. La discusión sobre estructura conduce a la puesta en cuestión de la teoría económica, lo que debe ser efectuado con una base teórica alternativa, en tanto la existencia de una cierta estructura parece confirmada por la experiencia.

VARIABLES, DIMENSIONES Y OBSERVACIONES

Otro problema se presenta con la toma de datos. Si lanzamos una piedra y tomamos datos de distancia vertical y horizontal al punto desde el que soltamos la piedra, la representación gráfica de estos datos dará una función de la altura y la distancia: es una función en el plano de dimensión 2. Sin embargo, el proceso no tiene por qué tener dimensión 2; de hecho, en el ejemplo, el número de variables del proceso no tiene que ver con los datos observados. ¿Cómo

podemos, entonces, estudiar un proceso del que desconocemos su dimensión real –número de variables- y del que sólo conocemos un aspecto especial –nuestra serie de datos- cuya dimensión probablemente no tiene nada que ver con la del proceso? La respuesta es que, salvo excepciones, el proceso no es estudiable.

Supongamos ahora que tenemos un proceso con un número N de dimensiones, y que el proceso nos es desconocido. Si fuésemos capaces de tomar datos de todas las variables, tendríamos una representación gráfica del proceso en un espacio de N dimensiones. Pero si se nos ha escapado una variable, que, por alguna razón, no hemos medido: entonces lo que tenemos es una aproximación gráfica al modelo en un espacio de $N-1$ dimensiones. Esta aproximación gráfica puede ser suficientemente descriptiva como para que podamos caracterizar el proceso, que es lo que buscamos. Esta aproximación fue introducida por Poincaré y, desde entonces, se denominan "secciones de Poincaré" a las imágenes producidas por el conjunto de puntos de un proceso de dimensión N , al atravesar un espacio de dimensión menor que N . Normalmente, por razones de claridad, las secciones de Poincaré se estudian en un espacio de tres dimensiones cortado por un plano.

Si ahora tenemos un proceso determinista, totalmente predecible y estructurado en un espacio de tres dimensiones. La sucesión de puntos de ese proceso en el espacio de tres dimensiones (trayectorias) puede ser la deseada, pero, en cualquier caso, si

cortamos ese espacio con un plano, las trayectorias cortarían al plano en algunos puntos (la sección de Poincaré). Si el proceso es tal como lo hemos definido, entonces la sección de Poincaré será un objeto geométrico sencillo y claramente definido. Puede ser un punto, una circunferencia, una recta, una curva, una espiral; puede ser cualquier otra figura, pero siempre será un objeto claro. La sección de Poincaré revela la estructura y la predictibilidad del proceso.

¿Y si el proceso es aleatorio? Entonces la sección de Poincaré será una nube de puntos que tenderá a ocupar todo el plano. ¿Y si el proceso es caótico? Entonces la sección de Poincaré será lo que se denomina un atractor extraño, es decir, un conjunto de trayectorias impredecible pero totalmente estructurado. Nunca podremos saber si estando en un punto de una trayectoria vamos a volver a pasar cerca; y mucho menos cuándo. Pero tendremos una figura extraordinariamente compleja, no una figura sencilla ni una nube de puntos.

Este proceder no resuelve el problema de la dimensionalidad de un proceso, pero ayuda a caracterizarlo. Podríamos estudiar las secciones de Poincaré del proceso y, a partir de ellas, caracterizarlo, a partir de la medición de las variables relevantes (lo que a priori no sabemos aunque sí suponemos). Nuestro desconocimiento del proceso nos lleva a intentar caracterizarlo, lo que exige la medida

de variables relevantes, lo que a su vez exige un conocimiento previo del proceso, que no existe. La necesidad de una teoría previa, que supla el desconocimiento absoluto inicial, aparece con toda su crudeza. Pero las secciones de Poincaré nos permiten, por lo menos, acercarnos a una caracterización intuitiva sobre la que construir una teoría previa. Existe una coincidencia entre nuestras tipologías de procesos y las secciones de Poincaré: bastaría con determinar la dimensión fractal o el coeficiente de Hurst de las trayectorias en la sección de Poincaré para caracterizar el proceso. Y podríamos determinar los máximos exponentes de Lyapunov en cada una de las dimensiones de la sección de Poincaré para determinar la existencia de caos. O aproximar la dimensión fractal y el coeficiente de Hurst mediante la pendiente del espectrograma doble-logarítmico de Fourier. Pero en todos estos casos nos encontramos con un problema muy importante: los algoritmos utilizados para calcular esas magnitudes sólo son válidos en procesos de pocas dimensiones. Esto es una restricción esencial en la práctica, ya que, justamente, desconocemos la dimensionalidad del proceso que estudiamos. Si dudamos entre un proceso aleatorio y un proceso caótico, y nuestra intención es establecer una distribución probabilística sobre una dimensión; la determinación de la dimensión fractal se transforma en esencial, ya que de ser un proceso aleatorio y dimensión fractal 2, la función de distribución general de Paretto-Levi se transforma en la Normal de Gauss,

perfectamente conocida; pero si la dimensión fractal no es 2, entonces estamos ante un proceso cuya distribución no es gaussiana, sino una Pareto-Levi inmanejable, de la que se desconocen más cosas que las que se conocen. (por ejemplo, la suma de variables normales con media y desviación típica conocida, es una distribución normal con media y distribución típica conocida; en el caso de las Pareto-Levi, no se sabe como es la distribución de una suma de variables, salvo en el caso particular de que tengan la misma dimensión fractal). Podemos, utilizar las secciones de Poincaré para caracterizar el proceso, pero sabemos que los algoritmos utilizados sobre estas secciones, para calcular las magnitudes esenciales, sólo son válidos si el proceso es de dimensión baja.

SIMULACIÓN PROCESOS FORMACIÓN DE PRECIOS: CONJETURA DE INDEPENDENCIA

En base a trabajos previos sobre funciones aplicadas a series de precios, se han realizado simulaciones (funciones logísticas) para procesos generales que no requieran datos específicos en cada mercado. Así en una serie de precios caracterizada por la volatilidad y el rango entre días medio, debía derivarse el diferencial comprador-vendedor y del número de transacciones diarias. Con ciertas salvedades en cuanto al cómputo del número de operaciones diarias en algunos mercados, las series simuladas

tenían un rango entre días y una volatilidad equivalentes a la del mercado que se pretendía simular. La extensión del simulador a series de valores, ha generado nuevas dudas en cuanto al funcionamiento de los mercados, sobre todo en el significado del diferencial comprador-vendedor por sobre el número de transacciones diarias.

La conjetura de independencia dice que los procesos de formación de precios en mercados financieros eficientes sólo dependen del diferencial comprador-vendedor y del número de transacciones diarias. Se entiende aquí por mercado financiero eficiente aquel en el cual cualquier participante puede presentar una oferta de compra o una oferta de venta, y puede aceptar una oferta de compra o una oferta de venta, sobre un volumen relativamente constante en el tiempo.

Sin embargo, el éxito relativo de la simulación ha planteado un serio problema conceptual. Si las características esenciales de una serie de precios solamente dependían del número de transacciones diarias y del diferencial comprador-vendedor, entonces, ¿tenían estructura los mercados? ¿Por qué parecía haber relaciones entre distintos instrumentos? La experiencia diaria de los mercados señala que los movimientos de los precios parecen apoyar la conjetura de independencia. Pero la experiencia en el largo plazo

opuestamente, parece apoyar la existencia de una estructura de mercados que, en cierta forma, debe anular a la conjetura de independencia.

LA HIPÓTESIS DE COHERENCIA GLOBAL

La experiencia muestra que existe una coherencia en el funcionamiento del sistema económico. A partir de la caracterización de los procesos de formación de precios como caóticos, podemos pensar que esa coherencia no responde a un principio de racionalidad que haya que incluir en la explicación de los procesos económicos, sino que basta con que los procesos tengan estructura, aunque esto sólo sea en una particular sección de Poincaré. El carácter persistente de las series de precios apunta a esa caracterización caótica. A partir de allí, el carácter antipersistente estable de las series permite pensar en una cierta predictibilidad; y el carácter cíclico no periódico (típico de los procesos caóticos) de las series permite pensar en la estructura del mercado.

En términos generales existen tres instrumentos sobre los que se ha discutido ampliamente las posibles relaciones en el ámbito de los mercados bursátiles. La doctrina señala que existe una relación entre los tipos a corto plazo, los tipos a largo plazo y los precios de las acciones. Resulta innegable que existe una relación, aunque al final sólo sea porque parece inverosímil que los tipos a corto plazo puedan subir eternamente y la bolsa también. Y la relación entre rentabilidad de las acciones y la prima de riesgo sobre los tipos a largo plazo ha sido objeto de miles de estudios. Pero ¿existe una relación?

La hipótesis de coherencia global dice que, siendo localmente válida la conjetura de independencia, los procesos de formación de precios (y por extensión los procesos económicos) responden a una estructura global, de tal forma que aunque la trayectoria del proceso no es predecible (debido a la conjetura de independencia), nunca pasará por todos los puntos del espacio, es decir, que habrá combinaciones de precios o dinámicas de precios, que no se podrán dar jamás. La hipótesis de coherencia global parece, de momento, mucho más una necesidad conceptual que una posibilidad teórica. Hasta aquí resulta necesaria para explicar la experiencia y la teoría

económica que procede de esa experiencia. Existe, sin embargo, una metodología que podría justificar la hipótesis de coherencia global sin recurrir a la experiencia.

Comprendemos entonces, que los mercados son caóticos en el sentido de impredecibles pero estructurados, lo que se refleja en la existencia de memoria de largo plazo. A partir de ello se puede transformar las series de precios en series antipersistentes estables y estudiar su estructura cíclica no periódica. El carácter antipersistente de la transformación de la serie de precios refleja la impredecibilidad correspondiente a la conjetura de independencia. La estructura cíclica no periódica subyacente corresponde a la hipótesis de coherencia global.

CONCLUSIONES

1- La **entropía** se erige así en un principio básico que rige la evolución natural y espontánea de las cosas en este mundo. Pues bien, dentro de este entorno, el hombre, haciendo valer su condición de ser inteligente, intenta establecer un cierto orden -dentro de este desorden natural- que le posibilite alcanzar un mínimo nivel de supervivencia e incluso de bienestar, para lo cual va creando en su provecho estructuras ordenadas por doquier, tanto físicas como de índole social, que disminuyen, por tanto, la entropía inherente al devenir espontáneo de la naturaleza.

2- La **aleatoriedad en los mercados financieros** no se sostiene, sino que hay evidencia de una pseudoaleatoriedad, determinada por la dinámica del sistema. Es decir, se trata de una aleatoriedad intrínseca que genera un proceso pseudoaleatorio como lo es el caos determinista, el cual es generado por la dinámica del atractor que origina dicho proceso. En los casos extremos de aleatoriedad, como son los *crash* y *boom*, la teoría de caos permite explicar dichos acontecimientos como parte de la evolución endógena del propio sistema, sin la necesidad de recurrir a variables exógenas. Esta evolución endógena viene determinada por la sensibilidad a las condiciones iniciales lo que a través del efecto mariposa puede explicar un crash o boom bursátil.

3- El hecho de que la evolución de los retornos accionarios se comporte en forma aleatoria también es explicado por la Teoría de Caos a través de los puntos o soluciones periódicas densas que se encuentran próximos de la **evolución de dicho sistema**. Así, se podrían repetir situaciones ocurridas en el pasado cuando la evolución del sistema pase nuevamente cerca de algún acontecimiento en particular. Por otra parte, en el muy corto plazo sería posible predecir la evolución de dicho sistema, lo que validaría el análisis técnico como herramienta predictiva. Con esto, la Teoría de Caos une las fluctuaciones rápidas, y a muy corto plazo, con las

de largo plazo. Es decir, no separa sino que une los cambios de minuto a minuto o día a día con los de mes a mes o año a año.

4- Lo que nos enseña el descubrimiento de los atractores extraños respecto a las predicciones estadísticas es que la aleatoriedad viene generada, no por causas extrínsecas, sino por la propia **dinámica global** del sistema. Reconocer, entre los fenómenos que se presentan como aleatorios, aquellos que podrían estar producidos por un atractor caótico es de fundamental importancia para plantearse una estrategia de gestión. Si el origen de la aleatoriedad procede del entorno, cabe la gestión basada en la planificación y el control en el cumplimiento de objetivos. En esta gestión no hay creación de entorno, ni aprendizaje; hay, como máximo adaptación a las señales del entorno y, cuando éste es muy cambiante, se reducen los plazos de la planificación. Cuando la aleatoriedad es intrínseca, es decir, cuando emana de la propia dinámica del sistema, ya no es posible esa predicción sobre la que se planifica y controla. Ahora es preciso considerar que la información del entorno va surgiendo de la propia dinámica interna del sistema, pasando a ser una variable endógena que ya no es susceptible de predicción, al depender de las propias decisiones de los inversores. Sobre la base de la propia información del sistema (cotizaciones, plazos, mercados), que se degrada en cuestión de minutos-, los analistas individuales toman decisiones en tiempo real, dando lugar

a entornos que un analista ordinario como el broker no identifica como información propia de un entorno basada en los indicadores de coyuntura que maneja (I.P.C., tipos de interés, PIB,).

5- Los datos proveniente del entorno y los análisis efectuados por los decisores –sea empleando alguna técnica externa a él o procesando internamente para ir justificando su decisión, estimulan la comparación de precios que se transan en los mercados con el valor de los activos que motorizan la inversión. El **proceso decisorio económico** estará afectado por las variaciones caóticas que se perciban y / o registren tanto como por las posibilidades aleatorias cíclicas.

6- La Economía afecta a las Finanzas tanto se trate de aspectos micro como macroeconómicos. El **predominio de la información** exigió organizaciones descentralizadas, gestiones desburocratizadas y controles basados en la confianza, la responsabilidad y la participación. Con la globalización de la economía, la interdependencia y la innovación se presentan inestabilidades e incertidumbres donde los cambios del entorno ya no resultan predecibles ni controlables. La información del entorno, realimentada por las propias actuaciones gestoras se torna variable endógena, y no permite establecer horizontes temporales de gestión ni el necesario tiempo de aprendizaje para la adaptación. La

teoría del caos, basada en principios de globalidad, holísticos, de no-equilibrio y de inestabilidad limitada, proporciona modelos y técnicas para el estudio de las emergentes organizaciones fractales, informales o amorfas, que practican el aprendizaje complejo en la oportunidad y gestionan la innovación y la creatividad.

7- Las finanzas definidas como un metasistema que mide y controla el valor de la Organización, estará impactada por la realidad económica y deberá preparar los sistemas de información para que de manera interactiva muestren las alarmas y los peligros con indicadores y tableros que hacen el seguimiento de la estrategia financiera en particular y la estrategia del negocio en general.

8- Se ha considerado que la **dinámica no lineal compleja** resulta bastante apropiada para modelizar el comportamiento de la economía afectando por ende al objetivo y las estrategias emergentes de las Finanzas, en virtud a los siguientes hechos:

- Los precios de los bienes y las cantidades fluctúan con período y amplitud irregular.
- Los indicadores agregados que representan la economía, exhiben también fluctuaciones irregulares.
- El crecimiento económico no sigue una tendencia continua, sino más bien una con tasas de cambio fluctuantes.

- La economía presenta ondas solapadas de consumo, tecnología y organización.
- El desarrollo económico agregado es un fenómeno inestable y explosivo cuando se mide en una escala temporal bio-astronómica.

9- Se podría comprender que según el modelo empleado –caótico o no caótico- se aborde la incertidumbre con **explicaciones diferentes** con lo que se llegue a justificar decisiones financieras contrarias emergentes de la misma economía. El valor hipotético de una decisión podrá amplificarse o simplificarse con sinergias positivas o negativas, según el caso, que dependerán de la percepción del inversor y de la posibilidad fáctica de ese curso de acción.

10- Con relación al **capital de trabajo**, las variaciones de los siguientes factores –que podrían analizarse y estudiarse a la luz de las teorías caóticas-, inciden fuertemente en su determinación:

- Precios de los insumos de los componentes del costo de los productos.
- Nivel de actividad y de venta de los bienes producidos.
- Empleo de técnicas e información sobre rotación en días que explican la duración de los ciclos económicos y los productivos.

Al ser el capital de trabajo el motor de la rentabilidad de los negocios, también se impacta en el valor de los mismos. Incide en este también las variaciones de los precios de las acciones y los modelos de valuación de activos financieros que se empleen ya que a partir de sus evaluaciones, pueden tomarse decisiones correctas o incorrectas según como se observe la realidad y su evolución.

11- Las **variaciones en las tasas de interés** afectan la prima de riesgo y el valor de los activos por un lado, y por otro, la política de financiación de la empresa. En el primer caso, la gestión de administración de riesgos debe puntualizar sobre la naturaleza contextual, situaciones de incertidumbre, probabilidad aleatoria y comportamientos caóticos. Respecto de la financiación, los cambios inciden en el costo de capital y las tasas de corte utilizadas, en la mezcla de capitalización, en las estrategias de cobertura y también en las políticas de retención y distribución de utilidades.

BIBLIOGRAFÍA

- Dinámica de Mercados. Madrid. 2002.
- Una propuesta de análisis económico en clave de entropía. Jesús Lizcano Alvarez. Madrid. 2004.
- Evidencia de Comportamiento Caótico en Índices bursátiles americanos. Espinoza C, Parisi F, Parisi A. Chile 2007.

- Más de medio siglo en busca de una teoría sobre los mercados de capitales. Estudios de Economía Aplicada. Spronk, Trinidad Segovia. Madrid.2005.