CONTROL ÓPTIMO: EL MODELO DE RAMSEY

Pablo Matías Herrera
Juan Pablo Silvera De Deus
Ana Silvia Vilker

Resumen

Los problemas planteados usando como marco el "control óptimo" permiten realizar maximizaciones de tipo intertemporal, y por esta razón es de suma importancia para el desarrollo de algunos modelos económicos. En este trabajo se estudiará un problema de control óptimo, particularmente el modelo de Ramsey, aplicado al crecimiento de una economía.

A medida que se desarrolla el trabajo, se detallan los elementos para lograr una maximización intertemporal que forman parte de un problema de control óptimo de vasta utilidad en el desarrollo de la teoría económica.

Abstract

The problems set out using the Optimal Control, allows making the maximization of intertemporal type. For this reason, is important the development of some economical models. In this work, we are going to study a problem of Optimal Control, especially the Ramsey's Model, applied to explain the economy growth.

As long as this work is developing, elements to achieve -an intertemporal maximization- are detailed, which integrate a problem of Optimal Control which is useful for the economic theory.

INTRODUCCIÓN

Los problemas planteados usando como marco el "control óptimo" permiten realizar maximizaciones de tipo intertemporal, y por esta razón es de suma importancia para el desarrollo de algunos modelos económicos. En este trabajo se estudiará un problema de control óptimo, particularmente el modelo de Ramsey, aplicado al crecimiento de una economía.

A medida que se desarrolla el trabajo, se detallan los elementos para lograr una maximización intertemporal que forman parte de un problema de control óptimo de vasta utilidad en el desarrollo de la teoría económica.

En la primera parte de este estudio se describirá el modelo y las partes que lo componen, las familias y las empresas. Se detallarán también sus restricciones presupuestarias y sus funciones de utilidad y beneficio respectivamente. Una vez planteado el modelo, se analizará el problema del crecimiento desde un punto de vista neoclásico y se describirá el equilibrio. En conjunción con esta resolución se realizará el diagrama de fases y se estudiará la transición hacia el equilibrio. Por último se presentarán las reflexiones finales.

1. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

1.1 Las familias

La diferencia entre los modelos de crecimiento exógeno (tales como el modelo de crecimiento de Solow-Swan) de los de crecimiento endógeno, es que en los segundos al agente económico familias (F), se les permite determinar de forma óptima su trayectoria de consumo. Estos agentes económicos pueden recibir ingreso de dos formas: mediante la colocación de activos en el mercado financiero recibiendo así una rentabilidad o un retorno sobre esta colocación, u ofreciendo su fuerza de trabajo en el mercado.

1.1.1 La restricción presupuestaria

La restricción presupuestaria que representa los ingresos que perciben los consumidores o familias estará formada por los rendimientos de los activos (en este caso bonos) y la remuneración a la fuerza de trabajo.

$$\dot{B} = wL + rB_T - C \quad (1)$$

Donde $\dot{B}$ representa la **variación agregada** del stock de bonos, w el salario que reciben por emplearse, L es la cantidad de trabajo que ofrecen, r es la tasa de interés del mercado, B_T es el stock de bonos en el momento T y C es el consumo de las familias.

La variable B_T puede ser mayor que cero, en ese caso se tendrá un consumidor acreedor y si es menor que cero el consumidor será deudor, siendo $\sum_{i=0}^{n} B_i = 0$

En general, los modelos de crecimiento tanto endógeno como exógeno, trabajan con variables per cápita y no agregadas**.** En este caso el modelo establece que la cantidad de habitantes de un país es igual al de trabajadores, es decir, sostienen que no hay desempleo y si este existe, es voluntario.

Entonces los valores agregados per cápita resultan:

$$\frac{B}{L} = b \Rightarrow \dot{b} = \left(\frac{B}{L}\right) = \frac{\dot{B}L - \dot{L}B}{L^2} = \frac{\dot{B}}{L}\cdot\cancel{\frac{L}{L}} - \frac{B}{L}\cdot\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{B}}{L} - n\frac{B}{L}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

y la tasa de crecimiento de la población es

$$L_t = L_0 e^{nt}$$

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}}{L} - nb \Rightarrow \frac{\dot{B}}{L} = \dot{b} + nb$$

$$\frac{\dot{B}}{L} = w + r\frac{B}{L} - \frac{C_t}{L}$$

$$\dot{b} + nb = w + rb - c_t$$

$$\dot{b} = w + rb - c_t - nb$$

$$\dot{b} = w + (r - n)b - c_t \quad (2)$$

Siendo (2) la restricción presupuestaria de las familias per cápita.

1.1.2 La función utilidad

La función de utilidad de las familias es la suma de las funciones instantáneas de utilidad $u(c_t)$ descontadas a una tasa ρ entre el periodo inicial, t=0 e infinito

$$U(0) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) L_t dt \quad (3)$$

La función de utilidad instantánea que se descuenta en el tiempo es:

$$u(c_t)=\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta} \quad (4)$$

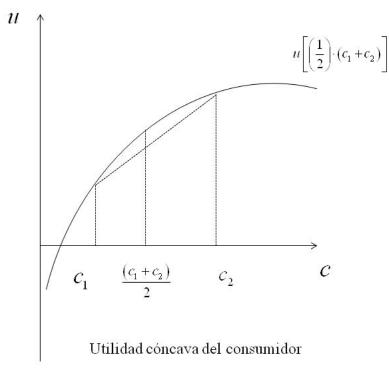
Si se remplaza (4) en (3) se tiene

$$U(0)=\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\,\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}L_t dt \quad (5)$$

Siendo (5) la utilidad de los consumidores que poseen un horizonte temporal infinito y L_t el tamaño de la población.

La función (5) tiene un supuesto adicional que sostiene que el consumidor tiene preferencia por suavizar sus consumos en una trayectoria dada, es decir, tienden a alisar el mismo, por ello es una función cóncava ya que ésta refleja el deseo de los hogares de consumir la misma cantidad cada día.

Gráfico 1. Función de utilidad del consumidor



Se puede ver que la utilidad promedio entre c_1 y c_2 es $\frac{(c_1+c_2)}{2}$ si la función es cóncava y $c_1 < c_2$ y la utilidad promedio es superior a la alcanzada en c_1. Por lo tanto la función de utilidad del modelo es: $u(c_t)=\frac{c_t^{1-\theta}-1}{1-\theta}$ y además cóncava, denominada CRRA (Constant Relative Risk Aversion).

Si se deriva se obtiene:

$$u'(c)=c^{-\theta}$$

Asumiendo que existe otra canasta de consumo c_2 y su derivada:

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}=\frac{c_1{}^{-\theta}}{c_2{}^{-\theta}}$$

Si se invierte el cociente entonces:

$$\frac{c_2}{c_1}=\left[\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)}\right]^{\frac{1}{\theta}}$$

Aquí se puede observar cómo la función CRRA proporciona su elasticidad, la cual es $\sigma=\frac{1}{\theta}$; siendo ésta la elasticidad de sustitución entre dos consumos en función de la relación marginal de sustitución, por lo que σ expresa la magnitud del efecto sustitución ante un cambio en los precios relativos. En el contexto del modelo que se está tratando, una fuerte variación de σ significa una fuerte preferencia por alisar el consumo actual de los individuos por encima de las generaciones futuras a una tasa de descuento, es decir, los individuos de hoy descuentan utilidad de los del mañana. Si el parámetro θ es mayor que cero los consumidores quieran suavizar su trayectoria de consumo; cuanto más grande es este parámetro, mayor será la preferencia por alisar el consumo en el tiempo. Por el contrario, si los individuos no desean alisar su consumo, el parámetro será cero. Por último, si el parámetro tiende a 1, la función de utilidad se convertirá en una función logarítmica. Los consumidores racionales elegirán una trayectoria de tipo alisada, esto es, $\theta > 0$. Entonces σ será menor a medida que θ crezca y por lo tanto la función de utilidad será menos elástica.

1.1.3 El problema de la maximización

Dada que $L_t = L_0 e^{nt}$ (6) reemplazada en (5) se obtiene:

$$U(0) = \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-\rho t} \cdot e^{nt} dt$$

$$U(0) = \int_0^\infty \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \cdot e^{-(\rho - n)t} dt \qquad (7)$$

Se establece que la tasa de descuento del consumo es mayor que el incremento poblacional de esta manera al calcular el límite tendiendo a infinito de $e^{-(\rho-n)t}$se obtiene como resultado cero.

El problema que se desea resolver es:

$$\begin{cases} MAX \to U(0) = \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \cdot \frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \\ S.A. \to \dot{b} = w + rb - c - nb \end{cases} \qquad (8)$$

El funcional objetivo se encuentra afectado por un factor de descuento. Esto hace que las condiciones necesarias se basen en el hamiltoniano de valor presente. El horizonte temporal del problema a analizar es infinito. En consecuencia las condiciones de transversalidad del problema tendrán que evaluarse en este límite temporal.

A continuación se plantea el hamiltoniano; cuya construcción es similar al de un lagrangiano en el que la restricción es una ecuación diferencial.

$$H(\bullet) = e^{-(\rho-n)t} \cdot \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) + v\left[w + (r-n)b - c \right] \qquad (9)$$

La "v" es el multiplicador dinámico de Lagrange y muestra el valor que el consumidor le asigna a un activo financiero adicional; también puede interpretarse como el precio sombra del activo b.

La diferencia con los ejercicios de maximización clásicos, radica en las condiciones de primero orden. En los problemas dinámicos de control óptimo, se tiene una variable de control (es la variable que el consumidor o firma pueden controlar), variable estado (es la variable que no se puede controlar y que produce variaciones en la restricción presupuestaria) y por último las condiciones de transversabilidad.

En este caso la variable de control es el consumo, la de estado son los activos financieros, notar que las familias pueden controlar su consumo pero no pueden hacer lo mismo con los rendimientos de sus activos financieros. Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \leftrightarrow 1-\theta \cdot \frac{c^{-\theta}}{1-\theta} \cdot e^{-(\rho-n)t} \Rightarrow e^{-(\rho-n)t} \cdot c^{-\theta} = v \quad (10)$$

La primera condición es la derivada del hamiltoniano con respecto a la variable de control (variable consumo) e igualada al precio sombra, es decir, al valor que el consumidor le asigna a una unidad adicional de activo financiero.

$$\frac{\partial H}{\partial b} = -\dot{v} \leftrightarrow -\dot{v} = v\left(r-n\right) \quad (11)$$

Esta condición es la derivada del hamiltoniano con respecto a la variable estado (el stock de bonos) que debe ser igualada a la variación en el precio sombra**.**

$$\underset{t\to\infty}{lím}\, b_t v_t = 0 \quad (12)$$

Esta última es la condición de transversabilidad y muestra que el valor de los bonos (el stock de bonos multiplicado por su precio) debe ser igual a cero en el infinito.

La interpretación económica de las dos primeras derivadas es que el valor marginal del consumo debe ser igual al valor marginal de la inversión. La condición de transversabilidad consiste en que: $b_T v_T = 0$ (es decir, se consume todo lo que se tiene) para que sea empíricamente correcto ya que la vida de un ser humano no es infinita sino finita; siendo T el último momento de su vida, los individuos no quieren dejar nada que tenga valor para después de su muerte, si lo dejasen lo podrían haber consumido en períodos anteriores y por lo tanto no hubiesen maximizado su utilidad.

Para resolver el modelo se aplica logaritmo en (10) logrando:

$$-(\rho - n)t - \theta \log(c_t) = \log(v_t) \quad (13)$$

Si se expresan los logaritmos como tasas de crecimiento:

$$-(\rho - n) - \theta\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) = \frac{\dot{v}}{v} \quad (14)$$

Operando en (11) $(r - n) = -\frac{\dot{v}}{v}$ (15). Igualando (14) y (15):

$$-\frac{\dot{v}}{v} = (r - n) = \theta\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) + (\rho - n) \quad (16)$$

De donde surge la ecuación de Euler:

$$r = \theta\left(\frac{\dot{c}}{c}\right) + \rho \quad (17)$$

El miembro de la derecha significa el beneficio o rendimiento del consumo que incluye una tasa de descuento que indica cuánto aumenta la utilidad si el consumidor opta por consumir en el presente o en el futuro; y un término que señala las preferencias del consumidor por alisar la trayectoria del consumo. Mientras el crecimiento del consumo sea mayor en el futuro, el consumidor deseará aumentar su consumo en el presente, es por eso que tasas positivas de crecimiento equivalen a trayectorias de consumo poco lisas.

Por último, el miembro de la izquierda también representa el beneficio o rendimiento de los activos financieros (tasa de interés); en el margen, los consumidores se mantienen indiferentes entre consumir o ahorrar.

De (17) se puede obtener la tasa de crecimiento del consumo $\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot \left(r - \rho \right)$ (18) Siendo ésta una ecuación diferencial homogénea de primer orden.

1.2 Las empresas

Las empresas compran trabajo a las familias remunerándolas con un salario w_t y capital a sus propietarios al precio R_t para producir un producto que venden a un determinado precio. Las empresas son competitivas y combinan capital y trabajo utilizando una tecnología que satisface las siguientes propiedades:

- La función de producción tiene *rendimientos constantes a escala*, de grado uno es decir: $F\left(\lambda K, \lambda L\right) = \lambda F\left(K, L\right)$.

- La productividad marginal de todos los factores de producción es *positiva* pero *decreciente*. Esto es:

  $\frac{\partial F}{\partial K} > 0 \quad \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ Las primeras derivadas son positivas y las segundas $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ negativas

La función de producción del modelo debe cumplir con las *condiciones de Inada.* Estas requieren que la productividad marginal del capital se acerque a cero cuando el capital tiende a infinito y viceversa, lo mismo sucede con respecto al trabajo.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\partial F}{\partial K}=0 \quad \lim_{l\to\infty}\frac{\partial F}{\partial L}=0$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{\partial F}{\partial K}=\infty \quad \lim_{l\to 0}\frac{\partial F}{\partial L}=\infty$$

La función de producción que satisface todas estas condiciones es la función Cobb-Douglas: $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ que per cápita resulta: $f(k) = Ak^{\alpha}$

Si R es el precio del capital, la tasa de beneficio que recibe el propietario del capital es $R-\delta$ donde δ es la tasa de depreciación del capital. La condición es que el rendimiento de los activos debe coincidir con el rendimiento del capital, esto es, $r = R-\delta$.

1.2.1 La maximización de beneficio de la empresa

La función de beneficio de la empresa es: $\pi = F(K,L)-(r+\delta)K - wL$

En términos de la función de producción Cobb-Douglas se obtiene: $\pi = AK^{\alpha}L^{1-\alpha} - (r+\delta)K - wL$

Para maximizar este beneficio se calculan las derivadas primeras con respecto al capital y el factor trabajo y se igualan a cero para encontrar el punto en que se cumple la condición necesaria de existencia de extremo:

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{1-\alpha} - (r+\delta) = 0$$
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = (1-\alpha)AK^{\alpha-1}L^{-\alpha} - w = 0$$

Si se convierten las variables a per cápita y los términos que están restando se pasan al otro miembro sumando se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$f'(k) = r+\delta \quad (19)$$
$$f'(l) = w$$

Es decir que las productividades marginales de cada factor son iguales a sus remuneraciones, siendo esto la condición necesaria para la maximización del beneficio. De la productividad marginal del capital se tiene:

$$r = f'(k) - \delta \quad (20)$$

Entonces, si la productividad marginal del capital es:

$$f'(k) = r$$

y calculamos la función que representa los costos variables a per cápita, esto es,

$$F(K, L) = rK + wL \Rightarrow f(k) = rk + w$$

$f(k) = w + rk$ reemplazando r por $f'(k) \Rightarrow f(k) = w + [f'(k)]k$ de donde (21)
se deduce que: $f(k) - f'(k)k = w$

2. EL EQUILIBRIO

En una economía cerrada y sin sector gobierno el mercado financiero puede encontrar el equilibrio con una única variable, el capital que debe tener una oferta no negativa. El mercado financiero estará en equilibrio cuando lo que pidan prestado tanto los consumidores como las empresas sea igual a todo lo que reciban en préstamos, sintetizado en la condición $b = k$, y es el tipo de interés que ajustará (como variable endógena) para llegar a esta igualdad, solo así los créditos serán iguales a los débitos y las deudas serán nulas, el único activo a largo plazo será el capital.

Si se sustituye en la ecuación (21) la obtenida en (19) resulta:

$$w = f(k) - (r + \delta)k \quad distribuyendo: w = f(k) - rk - \delta k$$

Y reemplazando este último resultado en la restricción presupuestaria per cápita de las familias (2):

$$\dot{b} = (f(k) - rk - \delta k) + rb - c - nb$$

Reemplazando $b = k$ resulta:

$$\dot{k} = f\left(k\right) - c - \left(n + \delta\right)k \quad (22),$$

logrando así la ecuación de comportamiento dinámico del stock de capital, para hallar el comportamiento óptimo de los consumidores, en la ecuación (18) se remplaza la expresión de la tasa de interés entonces:

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(f'\left(k\right) - \delta - \rho\right) \quad (18)$$

que representa el comportamiento de los consumidores y expresa que el consumidor solo aceptará óptimamente una senda de consumo creciente, cuando se lo recompense con un producto marginal superior.

Por último, si a la condición de comportamiento del stock de capital y a la del consumo se introdujera la función de Cobb-Douglas se llega a:

$$\dot{k} = Ak^{\alpha} - c - \left(\delta + n\right)k$$

$$\gamma_c \equiv \frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta}\left(\alpha Ak^{-(1-\alpha)} - \delta - \rho\right)$$

Ecuaciones (23) y (24) respectivamente que representan un sistema de ecuaciones diferenciales, cuya resolución nos dará la trayectoria del capital y del consume que maximiza la función de utilidad de las familias.

3. DIAGRAMA DE FASE Y LA TRANSICIÓN HACIA EL EQUILIBRIO

3.1 Diagrama de fase

Para construir el diagrama de fase en la ecuación (23) si $\dot{k}$=0 resulta que: $c = f(k) - (\delta$+n)k utilizando Cobb Douglas, c= $Ak^{\alpha} - (\delta + n)k$, esta curva pasa por el origen, c=0 y k=0, creciendo a partir de este punto con un máximo en $f'\left(k\right) = \delta + n$ para luego decrecer hasta el eje horizontal. En el caso de la tecnología Cobb-Douglas, el punto en el que la curva obtiene un máximo es:

$$\alpha A k^{-(1-\alpha)} = \delta + n \text{ despejando k: } k_{oro} = \left(\frac{\alpha A}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Luego se debe preguntar qué sucedería si el consumo aumenta marginalmente, es decir, como se moverá el stock de capital cuando el consumo aumenta.

Regresando entonces a la ecuación de comportamiento del capital

$$\dot{k} = f(k) - c - (\delta + n)k$$

Se observa que cuando se produce un aumento marginal del consumo, el stock del capital disminuye (porque el consumo en esta ecuación aparece con un signo negativo, esto indica que está impactando en el capital de manera negativa). Con ello, se llega a la conclusión que **por encima de esta parábola, el capital disminuirá.**

En (24) sí $\dot{c} = 0$ se tienen dos posibilidades:

$$c = 0 \wedge \frac{1}{\theta}\left(f'(k) - \delta - \rho \right) = 0 \cdot$$

Sí c=0 el consumo es el eje horizontal del gráfico; en la segunda opción sólo se satisface cuando el stock de capital $k^* / f'(k) = \rho + \delta$ ·

Utilizando la función de Cobb-Douglas se llega a:

$$\alpha A (k^*)^{-(1-\alpha)} = \rho + \delta \Rightarrow k^* = \left(\frac{\alpha A}{\rho + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La misma representa una línea recta vertical que es inferior al stock k_{oro} ya que $\rho > n$ y f(k) es una función decreciente. Esto quiere decir que la línea vertical correspondiente a $\dot{c} = 0$ se ubicará a la izquierda del máximo de $\dot{k}$ =0.

Para determinar la dinámica del consumo, se debe observar nuevamente la función de comportamiento de esta variable y ver qué pasa a la izquierda y a la derecha de la curva que representa la variación del consumo preguntándose cómo influye un cambio marginal del capital en el consumo. Dado que $f'(k)$ es una función decreciente, entonces un aumento en k reduce el valor de esta función entonces el consumo cae, concluyendo que a la derecha k* el consumo disminuye.

A continuación se presenta el diagrama de fases construido en base a lo desarrollado en los párrafos anteriores.

Gráfica 2. Diagrama de fases del modelo de Ramsey

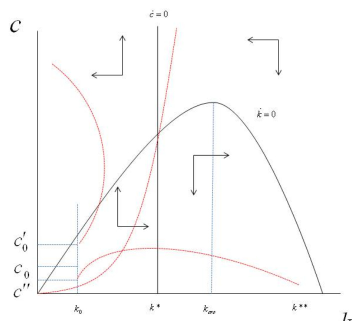


Diagrama de fases para el modelo de Ramsey

3.2 Análisis del diagrama de fase

Existen tres estados estacionarios ya que las curvas $\dot{c} = 0 \wedge \dot{k} = 0$ se cruzan en:

1. $c = 0 \wedge k = 0$

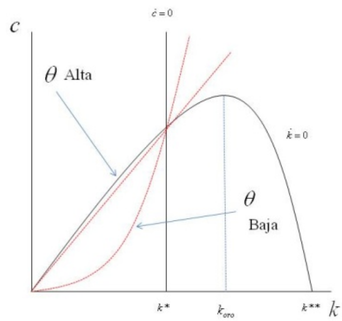
2. k^{**} corresponde a la intersección de $\dot{k}=0$ y el eje horizontal. Si substituimos $\dot{k}=0 \wedge c=0$ en la función del comportamiento del capital (23), esto tendrá como resultado el stock de capital estacionario $f\left(k^{**}\right)=\left(n+\delta\right)k \Rightarrow k^{**}=\left(\dfrac{A}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ incluyendo Cobb-Douglas.
3. $\dot{k}=0 \wedge k^{*}$, el nivel de capital en este caso es k* y el consumo asociado $c=f\left(k^{*}\right)-\left(n+\delta\right)k^{*}$ **la economía deberá converger hacia este estado estacionario ya que es el único que posee cantidades de consumo positivas.**

El primer estado estacionario es inestable porque si se empieza cerca del origen, nunca se llegará nuevamente a este punto debido a que el movimiento de las variables determina un alejamiento del mismo. El segundo estado estacionario k (oro) es estable dado que todas las flechas apuntan hacia él, pero es el tercer estado estacionario, k*, el estado estacionario con “punto silla”, este presenta una estabilidad un poco especial, ya que hay solo una trayectoria que lleva las flechas del gráfico al punto estacionario.

Los consumidores escogerán el consumo que corresponda a esta trayectoria estable, a largo plazo entonces, la economía tiende hacia el estado estacionario k^{*} y a medida que la economía se acerque al nivel de capital del estado estacionario, el consumo aumentará.

Así por ejemplo, se puede analizar qué ocurre con el parámetro θ si este es mayor o menor que cero. En el primer caso, los consumidores van a consumir mucho para poder tener una trayectoria de consumo lisa, lo contrario sucede cuando es menor, cuando a los individuos no les importa tener una trayectoria de consumo lisa, tal como lo muestra el siguiente gráfico

Gráfico 3



Por último, otra manera de darse cuenta que se está en un estado estacionario, si en un determinado punto k_0 es $k_0 < k^*$ la economía crecerá y el capital lo hará a una tasa decreciente, al ir aumentando el capital, su producto marginal disminuirá y se va aproximando al estado estacionario. Si $k_0 > k^*$ la economía no crece y vuelve hacia el estado estacionario moviéndose a la izquierda.

4. REFLEXIONES FINALES

En este trabajo se expuso el problema de la optimización dinámica para un período infinito. Estos modelos tienden a introducir dificultades relativas a las condiciones de transversalidad y las trayectorias de tiempo óptimo como las de punto terminal fijo, línea terminal horizontal, vertical truncada o terminal horizontal truncada. En vez de enfrentar estos aspectos se ha resuelto el problema de la optimización con un modelo neoclásico de crecimiento.

La relevancia del estudio se basa en que el control óptimo permite realizar maximizaciones de tipo intertemporal, y por esta razón son de suma utilidad en la teoría económica.

Además al utilizar un problema económico que haga uso de esta herramienta matemática en particular, se considera que contribuye a la correcta interpretación de los componentes que integran los problemas de control óptimo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdá, E. (2001). *Optimización Dinámic*a. Madrid, España. Prentice Hall.

Sala-I-Martin, X. (1994). *Apuntes de crecimiento económico*. Barcelona, España. Antoni Bosch S.A.

Chiang, A. &Wainwright, K. (2006). *Métodos Fundamentales de Economía Matemática*. México. Mcgraw-Hill Interamericana.