CMA IADCOM - UBA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN

Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Económicas

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

POLÍTICA DE REEMPLAZO DE MAQUINARIA UTILIZANDO PROGRAMACIÓN DINÁMICA

García Fronti, Verónica y Bianco, María José

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión (CMA) Av. Córdoba 2122 – 1120AAQ. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina

vgarciafronti@economicas.uba.ar – mariajose.bianco@economicas.uba.ar

Resumen

Recibido: 03-10-2023

Aceptado: 20-11-2023

Palabras clave

Investigación operativa,
Programación dinámica,
Reemplazo de maquinaria

La estrategia de reemplazo de maquinaria busca mejorar el rendimiento de aquellos activos cuyo costo de mantenimiento aumenta y cuya productividad disminuye con el paso del tiempo. Cuando un equipo permanece en servicio durante períodos prolongados se generan altos costos de mantenimiento y por lo tanto se plantea su reemplazo.

En este artículo se presentará el enfoque utilizado por la Investigación de Operaciones para resolver el problema de establecer la política de reemplazo de equipos dentro de un horizonte temporal definido mediante programación dinámica determinística.

El trabajo se estructura en tres partes: en la primera se describen las características generales de programación dinámica, en la segunda parte se plantea el problema general de reemplazo de un equipo y luego se resuelve un ejemplo.

ISSN (En línea) 2362 3225

MACHINERY REPLACEMENT PROBLEM USING DYNAMIC PROGRAMMING

Abstract

The machinery replacement strategy aims to enhance the performance of assets whose maintenance costs increase, and productivity decreases over time. Extended periods of service result in high maintenance costs, prompting consideration for replacement.

This article will outline the Operations Research approach used to address the challenge of establishing an equipment replacement policy within a defined time horizon through deterministic dynamic programming.

The work is divided into three parts: the first part describes the general characteristics of dynamic programming, the second part outlines the general equipment replacement problem, and the third part provides a solution through an illustrative example.

KEYWORDS

Operation Research,

Dynamic Programming,

Machine replacement

ISSN (En línea) 2362 3225

INTRODUCCIÓN

Las políticas de reemplazo de maquinarias buscan optimizar el rendimiento de aquellos bienes cuyo costo de mantenimiento aumenta y su productividad disminuye con la antigüedad de estos. Los equipos que permanecen mucho tiempo en servicio tienen un alto costo de mantenimiento y pueden ser reemplazados después de una cierta cantidad de años en operación. El problema que se va a tratar es determinar la edad óptima de reemplazo de un equipo.

La problemática de decidir cuándo se debe reemplazar un equipo a lo largo de los años se debe a que cuánto más tiempo esté en servicio mayor es su costo de mantenimiento y menor es su productividad, esto determina que al llegar a cierta edad puede resultar más económico reemplazar la maquinaria que conservarla.

En este trabajo se presenta el enfoque que aplica la Investigación de Operaciones para resolver el problema de establecer una política adecuada de reemplazo de un equipo en un horizonte temporal determinado.

La técnica que se utilizará es la de programación dinámica determinística por lo que en el siguiente apartado se describirán las características generales de programación dinámica, para profundizar en los conceptos matemáticos involucrados se recomienda el libro de Cerdá Tena (2012) y De la Fuente, A. (2000). Por otro lado, para analizar su utilización en investigación operativa los textos recomendados son Hillier F.S., Lieberman G.J. (2010) y Taha Hamdy A. (2012).

1. CARACTERÍSTICAS GENERALES DE PROGRAMACIÓN DINÁMICA

En los problemas de programación dinámica, se considera la evolución de un sistema dinámico a lo largo de cierta cantidad de etapas que parte del estado inicial y cuya evolución depende del valor que se dé a la variable de control que influye en el sistema. El objetivo en estos problemas es optimizar el valor de la función objetivo.

La programación dinámica es un procedimiento matemático diseñado para facilitar la toma de decisiones secuenciales interrelacionadas, se inicia descomponiendo el problema original en subproblemas más pequeños, lo que facilita los cálculos. Estos cálculos se llevan a cabo de manera recursiva, donde la solución óptima de un subproblema se utiliza como entrada para resolver el siguiente, y así sucesivamente, hasta llegar al último subproblema y obtener la solución óptima para todo el problema.

La forma en que se realizan los cálculos recursivos depende de cómo se descomponga el problema original, y los cálculos pueden efectuarse hacia adelante o hacia atrás. En la recursividad hacia adelante, los cálculos avanzan desde la etapa inicial hasta la final, mientras que, en la recursividad hacia atrás, se inicia desde la etapa final y se retrocede hacia la etapa inicial. Ambos enfoques conducen a la misma solución óptima, pero la recursividad hacia atrás es más comúnmente utilizada debido a su eficiencia computacional.

Los elementos esenciales de la programación dinámica incluyen la descomposición del problema en etapas con políticas de decisión, la determinación de estados en cada etapa, la modificación del estado inicial en cada decisión de etapa, la definición de la decisión óptima para cada etapa y estado inicial posible, y la aplicación de una relación recursiva que identifica la política óptima de una etapa dada la política óptima de la etapa siguiente, ya sea mediante recursividad en retroceso o en avance.

El procedimiento que se utilizará se basa en el uso del principio de optimalidad de Bellman, el mismo establece que dada una secuencia óptima de decisiones, cualquier subsecuencia que se tome también será una subsecuencia óptima; esto permite descomponer el problema original en subproblemas que son más manejables. A continuación, se abordará la resolución de un problema específico que implica la definición de una política óptima para el reemplazo de un equipo utilizando programación dinámica.

2. POLÍTICA DE REEMPLAZO DE MAQUINARIA

La problemática de decidir cuándo se debe reemplazar un equipo a lo largo de los años se debe a que cuánto más tiempo esté en servicio un equipo mayor es su costo de mantenimiento y menor es su productividad, esto determina que al llegar a cierta edad puede resultar más económico reemplazar la maquinaria que conservarla.

En esta sección se presenta el planteo del problema si se desea analizar el reemplazo de un equipo para un período de años determinado en base al planteo realizado por Taha (2012) en el capítulo 12 página 46.

Al inicio de cada año se debe decidir si el equipo se mantiene en servicio un año más o se reemplaza por uno nuevo. Se definen las siguientes variables que dependen de los años del equipo:

Horizonte de planificación: T períodos

$r(x)\text{: } Ingreso\ anual\ de\ un\ equipo\ de\ x\ \text{años}$

$c(x)\text{: } Costo\ de\ operación\ de\ un\ equipo\ de\ x\ \text{años}$

$s(x)\text{: } Valor\ de\ desecho\ de\ un\ equipo\ de\ x\ \text{años}$

$I\text{: } Costo\ de\ adquisición\ de\ un\ equipo\ nuevo$

La etapa está representada por cada año de planificación t por un período de planificación: T.

La variable de control (u_t), está asociada a la decisión de conservar (C) o reemplazar (R) el equipo al inicio de la etapa t:

$$u_t = \begin{cases} C & Conservar\ el\ equipo \\ R & Reemplazar\ el\ equipo \end{cases}$$

La variable de estado, x_t, es la edad de la máquina al inicio de la etapa t.

La ecuación de transición es: $x_{t+1} = g(x_t,\ u_t)$ donde:

$$g(x_t,\ u_t) = \begin{cases} x_t + 1 & \textit{Si se decide conservar el equipo} \\ 1 & \textit{Si se decide reemplazar el equipo} \end{cases}$$

La función recompensa dado que la máquina tiene x años al inicio del año t está expresada por la siguiente función de ingreso neto máximo.

$$V_t(x_t,\ u_t) = \textit{ingreso neto máximo en los años } t,\ t+1,\ \ldots,\ T$$

La ecuación recursiva, al comienzo de la última etapa de planificación (t=T) es:

$$V_T(x_T) = max\begin{cases} r(x_\mathrm{T}) - c(x_\mathrm{T}) + s(x_{\mathrm{T}+1}) & \textit{Conservar el equipo} \\ r(0) - c(0) - I + s(x_\mathrm{T}) + \mathrm{s}(1) & \textit{Reemplazar el equipo} \end{cases}$$

La ecuación recursiva, en cualquier otra etapa previa a la última etapa (t<T) es:

$$V_t(x_t) = max\begin{cases} r(x_t) - c(x_t) + V_{t+1}(x_{t+1}) & \textit{Conservar el equipo} \\ r(0) - c(0) - I + s(x_t) + V_{t+1}(1) & \textit{Reemplazar el equipo} \end{cases}$$

A continuación, se resolverá un ejemplo concreto de reemplazo de maquinaria utilizando el planteo matemático presentado en esta sección.

3. EJEMPLO RESUELTO

Una empresa debe determinar la política de reemplazo para una de sus máquinas que a la fecha tiene una antigüedad de 2 años. El período de planificación es de 4 años al finalizar ese período la empresa desecha el equipo. Por otro lado, se ha definido que una máquina de 5 años debe ser reemplazada, siendo el costo de una nueva de $100000.

Los ingresos, costos y valor de desecho dependen de la edad de la máquina. En la Tabla 1 se presentan estos valores en miles de pesos para un equipo en diferentes años de antigüedad, desde nuevo hasta 5 años que es la vida útil que permite la empresa.

Tabla 1: Ingresos, Costos y Valor de desecho

Edad de la máquina (años)	**Ingresos ($)**	**Costo de operación ($)**	**Valor de desecho ($)**
x_t	$r(x_t)$	$c(x_t)$	$s(x_t)$
0	30000	300	
1	22000	500	70000
2	18500	1100	65000
3	16500	1500	45000
4	15000	1800	30000
5	13500	1900	15000

De acuerdo con el planteo matemático realizado en la sección anterior y los datos del problema se cuenta con la siguiente información:

Etapas (t): 4

Variable de control: $u_t = \begin{cases} Conservar\ la\ máquina\ (C) \\ Reemplazar\ la\ máquina\ (R) \end{cases}$

Variable de estado: x_t

Los valores factibles de la variable de estado se muestran en la Tabla 2, en donde al analizar una máquina que se sabe que al inicio de la etapa 1 tiene una edad de 2 años y que al comienzo de la etapa 2 las posibles edades del equipo son 1 año si se definió reemplazarlo en la etapa previa o de 3 años si se decidió conservarlo en la primera etapa.

Tabla 2: Valores factibles de la edad de máquina

Etapa (t)	**Edad de la máquina al comienzo de cada etapa.** x_t **(años)**
t=1 (Inicio de planificación)	2
t=2	1, 3
t=3	1,2,4
t=4 (Final del horizonte de planificación)	1,2,3,5
t=5	1,2,3,4

La Tabla 2 presenta todos los valores factibles de la variable de estado, antigüedad del equipo, en las cuatro etapas de planificación y también se presentan los estados factibles de la variable de estado al comienzo de la quinta etapa.

Debido a que la compañía estipuló un período de planificación de reemplazo óptimo de maquinaria de cuatro años se debe descomponer el problema en cuatro etapas y se inician los cálculos recursivos desde la última etapa hasta la primera. A continuación, se inicia el análisis en la cuarta y última etapa de planificación.

ETAPA 4 (última etapa de planificación)

Para realizar el análisis en la cuarta etapa se tiene en cuenta que si al comienzo de esta se decide conservar el equipo su ingreso neto incluye: el ingreso anual, el costo de operación y el valor de desecho ya que la empresa definió que al finalizar el período de planificación se debe desechar el equipo. Si por el contrario se decide reemplazarlo, su ingreso incluye además el costo de adquisición del nuevo equipo (I) y el valor del equipo reemplazado $s(x_4)$ y el valor de desecho de reemplazo $\mathrm{s}(1)$.

$$V_4(x_4) = max \begin{cases} r(x_4) - c(x_4) + s(x_5) & Conservar \\ r(0) - c(0) - I + s(x_4) + \mathrm{s}(1) & Reemplazar \end{cases}$$

Tabla 3: Ingresos en la Etapa 4

	Conservar	**Reemplazar**	**Solución óptima**	
$\boldsymbol{x_4}$	$r(x_4) - c(x_4) + s(x_5)$	$r(0) - c(0) - I + s(x_4) + \mathrm{s}(1)$	$V_4(x_4)$	$\boldsymbol{u_4}$
1	22000-500+65000=86500	30000-300-100000+70000+70000=69700	86500	C
2	18500-1100+45000=62400	30000-300-100000+65000+70000=64700	64700	R
3	16500-1500+30000=45000	30000-300-100000+45000+70000=44700	45000	C
5	Debe reemplazarse	30000-300-100000+15000+70000=14700	14700	R

Una vez realizados los cálculos en la cuarta etapa se procede a analizar la etapa previa, en este caso la tercera etapa.

ETAPA 3

De la misma forma que se analizó en la cuarta etapa, se observa que si al comienzo de la etapa 3 se decide conservar el equipo el ingreso neto desde el comienzo de la etapa 3 hasta finalizar el período de planificación debe tener en cuenta el ingreso neto para el tercer año, el costo de mantenimiento del equipo y el ingreso máximo que se obtiene en las etapas subsiguientes, en este caso $V_4(x_4)$. Por otro lado, si se define reemplazar el equipo el ingreso neto incluye además la compra de la máquina nueva y el valor de desecho de la maquina reemplazada. En la Tabla 4 se muestran los valores obtenidos en cada caso. Observe que los valores de $V_4(x_4)\ y\ V_4(1)$ se obtienen de la Tabla 3 que se realizó analizando la cuarta etapa.

$$V_3(x_3) = max\begin{cases} r(x_3) - c(x_3) + V_4(x_4) & Conservar \\ r(0) - c(0) - 100000 + s(x_3) + V_4(1) & Reemplazar \end{cases}$$

Tabla 4: Ingresos en la Etapa 3

	Conservar	Reemplazar	Solución óptima	
$\boldsymbol{x_3}$	$r(x_3) - c(x_3) + V_4(x_4)$	$r(0) - c(0) - 100000 + s(x_3) + V_4(1)$	$V_3(x_3)$	$\boldsymbol{u_3}$
1	22000 – 500 + 64700=86200	30000-300-100000+70000+86500=86200	86200	C y R
2	18500 – 1100 + 45000=62400	30000-300-100000+65000+86500=81200	81200	R
4	15000 – 1800 + 14700=27900	30000-300-100000+30000+86500=46200	46200	R

De la misma forma que se realizó el análisis en la tercera etapa se realiza en la etapa previa que es el segundo año de planificación, como se muestra en la Tabla 5.

Tabla 5: Ingresos Etapa 2

	Conservar	Reemplazar	Solución óptima	
x_2	$r(x_2) - c(x_2) + V_3(x_3)$	$r(0) - c(0) - 100000 + s(x_2) + V_3(1)$	$V_2(x_2)$	u_2
1	22000-500+81200=102700	30000-300-100000+70000+86200=85900	102700	C
3	16500-1500+46200=61200	30000-300-100000+45000+86200=60900	61200	C

Una vez analizada la segunda etapa se debe analizar la primera etapa que es el primer año de planificación en donde la variable de estado es conocida y es de 2 años.

ETAPA 1 (Inicio)

$$V_1(x_1) = max\begin{cases} r(x_1) - c(x_1) + V_2(x_2) & CONSERVAR \\ r(0) - c(0) - 100000 + s(x_1) + V_2(1) & REEMPLAZAR \end{cases}$$

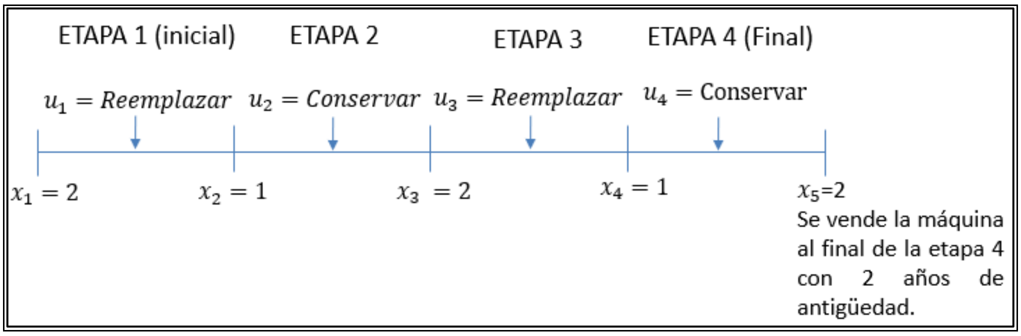
En la Tabla 6 se muestra el ingreso que se obtiene si se define conservar o reemplazar el equipo.

Tabla 6: Ingresos Etapa 1

	Conservar	Reemplazo	Solución óptima	
$\boldsymbol{x_1}$	$r(x_1) - c(x_1) + V_2(x_2)$	$r(0) - c(0) - 100000 + s(x_1) + V_2(1)$	$V_1(x_1)$	$\boldsymbol{u_1}$
2	18500-1100+61200=78600	30000-300-100000+65000+102700=97400	97400	R

De esta forma finaliza el procedimiento y es posible establecer la política óptima de reemplazo para los cuatro años de planificación revisando las Tablas: 6,5, 4 y 3. Esquemáticamente la secuencia óptima de decisiones se visualiza en la Figura 1.

Figura 1: Secuencia óptima de decisiones



Así, en la Etapa 1 la decisión óptima es reemplazar el equipo (Tabla 6), resultando que el estado inicial para la Etapa 2 es una máquina de 1 año de antigüedad y que la decisión que se debe tomar es conservar el equipo (Tabla 5). Al comienzo de la Etapa 3 el equipo tiene una antigüedad de 2 años por lo que la decisión óptima es reemplazarlo por uno nuevo (Tabla 4), por lo que la cuarta etapa se inicia con una maquinaria de un año por lo que se debe conservarlo (Tabla 3). El ingreso neto máximo obtenido en estos cuatro años de planificación es de 97400 (expresado en miles de pesos).

CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha abordado, desde el enfoque de la investigación operativa, la problemática de definir la secuencia óptima de reemplazo de un bien utilizando programación dinámica determinística. El objetivo del problema planteado fue mostrar la utilidad de la optimización dinámica y así enseñar el manejo de esta técnica cuantitativa en contextos de tiempo discreto y horizonte temporal finito.

Asimismo, es importante observar que, si bien se ha identificado la gestión óptima para el problema dado, esta metodología también permite conocer cómo proceder si el decisor se desviara de la trayectoria óptima. Para seguir avanzando en la resolución de diferentes problemas vinculados con programación dinámica, es posible encontrar más aplicaciones de la programación dinámica en libros de investigación operativa como los de Hillier et al. (2010) y Taha Hamdy (2012). En futuros trabajos se analizará aplicar esta herramienta en problemas en donde debe decidirse una política óptima de reemplazo de procesos, tecnologías o plantas físicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdá Tena, E. (2012) Optimización dinámica. México. Alfaomega.

De la Fuente, A. (2000) Mathematical methods and models for economists. UK. Cambridge University Press.

Hillier F.S., Lieberman G. J. (2010) Introducción a la Investigación de Operaciones. México. Mc Graw Hill.

Taha Hamdy A. (2012) Investigación de Operaciones México. Pearson.