REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMATICOS APLICADOS A LA GESTION Y LA ECONOMIA - AÑO 7 VOLUMEN II (2020-II)

CMA IADCOM - UBA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN

Universidad de Buenos Aires Facultad de Ciencias Económicas

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

LOS NÚMEROS R Y LA INCERTIDUMBRE HUMANA

Rubin, Carlos

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas. CIMBAGE-IADCOM. Av. Córdoba 2122 – 1120AAQ. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina

cxrubin@gmail.com

Resumen

Recibido: 08-09-2021

Aceptado: 01-11-2021

Palabras clave

Incertidumbre humana, Números Borrosos Triangulares (NBT)

La evaluación humana es un fenómeno de naturaleza personal que se presenta bajo la forma de opiniones, juicios y decisiones. Este trabajo considera que la misma tiene dos componentes, valor y certidumbre, y desarrolla los Números R, un lenguaje que permite su cuantificación, registro y procesamiento.

El valor es la máxima presunción que hace el evaluador sobre una variable incierta basándose en aspectos individuales tales como: observación, enfoque, hipótesis, conocimiento, experiencia, motivación, sensibilidad, prejuicios, intuición, propensión, aversión. A su vez lo anterior está afectado por los fenómenos del mundo real.

La certidumbre es una percepción que refiere al grado de creencia del evaluador, es decir, la probabilidad por él percibida de que su valoración sea cierta. La incertidumbre humana, conjugada de la certidumbre, es un complemento de la valoración por lo que su omisión hace incompleta a la evaluación humana.

Los Números R modelan una estructura simple y práctica, que cuantifica el valor (V) de una variable (X) y su certidumbre (P), y los encapsula en el operador R (X, V, P). En particular, V es la máxima presunción de la variable incierta X y P la probabilidad subjetiva de que V sea cierto. El procesamiento de los Números R se realiza con los números borrosos triangulares (NBT).

Este trabajo describe los Números R, sus marcos teórico y metodológico, y se presentan algunos ejemplos de aplicación. Los Números R pueden ser utilizados en modelos de distinta complejidad y ser aplicados a distintos campos tales como: economía y finanzas, administración de negocios, riesgo agrario, turismo, bienestar social, educación, ecología, sostenibilidad, jurisprudencia, toma de decisión.

ISSN (En línea) 2362 3225

R-NUMBERS AND HUMAN UNCERTAINTY

Abstract

KEYWORDS

Human uncertainty, Triangular Fuzzy Numbers (TFN)

Human assessment is a phenomenon of a personal nature that occurs in the form of opinions, judgments and decisions. This work considers that same has two components, value and certainty, and develops the R-Numbers, a language that allows their quantification, registration and processing.

The value is the maximum assumption that the evaluator makes about an uncertain variable based on individual aspects such as: observation, focus, hypothesis, knowledge, experience, motivation, sensitivity, prejudices, intuition, propensity, aversion. In turn, the above is affected by the phenomena of the real world.

Certainty is a perception that refers to the evaluator's degree of belief, that is, the probability perceived by him that his assessment is true. Human uncertainty, combined with certainty, is a complement to the value, so its omission makes the human assessment incomplete.

The R-Numbers model a simple and practical structure that quantifies the value (V) of a variable (X) and its certainty (P), and encapsulates them in the operator R (X, V, P). In particular, V is the maximum assumption of the uncertain variable X and P, the subjective probability that V is true. The R Numbers processing is done with the triangular fuzzy numbers (TFN).

This work describes R-Numbers, their theoretical and methodological frameworks, and some application examples are presented. R-Numbers can be used in models of different complexity and applied to different fields such as: economy and finance, business administration, agricultural risk, tourism, social welfare, education, ecology, sustainability, jurisprudence, decision-making.

ISSN (En línea) 2362 3225

INTRODUCCIÓN

El conocimiento es el elemento esencial tanto para entendernos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea, como para pensar, hablar, hacer y decidir. En la mayoría de los casos el conocimiento es nítido como una medición, cálculo o percepción sensorial. En otros, en cambio, es impreciso, borroso, incierto, como en el caso de las opiniones, juicios y evaluaciones que produce una persona, lo cual es el resultado de un proceso complejo e individual, producto de la observación, enfoque, hipótesis, conocimiento, experiencia, motivación, sensibilidad, prejuicios, intuición, propensión, aversión.

Si bien la descripción anterior puede producir una sensación abstracta en cierto sentido, tenemos que aceptar que este proceso está activo dentro nuestro y funciona en un modo continuo y permanente, de una forma aceptablemente confiable. La mayoría de las decisiones personales trascendentes responden a un proceso privado. Otras decisiones, en cambio, se deben formalizar en un lenguaje apto para compartirlas con el mundo exterior.

Para investigar sobre lo antes mencionado, es necesario familiarizarse con el concepto de conocimiento, opinión, verdad y razonamiento humano. Hace 2.400 años los filósofos de la Antigua Grecia se interesaban en estos aspectos. Se hace una breve reseña.

Platón habla sobre el conocimiento, la opinión y la ignorancia. Afirma que el conocimiento es una concepción del espíritu confirmada por la razón; mientras que la opinión es una concepción del espíritu cuya verdad o cuya falsedad demuestra la razón. Asimismo, Platón distingue cuatro situaciones que acontecen en la mente humana, en relación con la verdad y la claridad.

> *…ahora aplica a las cuatro secciones estas cuatro afecciones que se generan en el alma: inteligencia, a la suprema; pensamiento discursivo, a la segunda; a la tercera asigna la creencia y a la cuarta la conjetura; y ordénalas proporcionadamente, considerando que cuanto más participen de la verdad tanto más participan de la claridad (García Gual, C. Platón, Tomo 2, República, p. 221).*

Aristóteles desarrolla la dialéctica, un método para poder razonar todo problema que se nos proponga, a partir de las cosas plausibles, según el cual, mientras sostenemos un enunciado, no digamos nada que le sea contrario. Distingue dos tipos de razonamiento: el demostrativo y el dialéctico. El primero es el que está afectado de una necesidad; es decir, aquel que partiendo de premisas ciertas llega, necesariamente, a una conclusión determinada. El razonamiento dialéctico, en cambio, está afectado de incertidumbre; es decir, aquel que partiendo de una premisa cierta no alcanza necesariamente una conclusión determinada.

> *Hay demostración cuando el razonamiento parte de cosas verdaderas y primordiales, o de cosas cuyo conocimiento se origina a través de cosas primordiales y verdaderas; en cambio es dialéctico el razonamiento construido a partir de cosas plausibles (García Gual, C. Aristóteles, Tratados de Lógica, Tomo 1, Órganon, Tópicos, Libro I, p. 90).*

Sexto Empírico afirma que nuestra mente percibe apariencias más o menos confusas, que si bien no nos conducen a lo verdadero nos guían hacia lo probable, lo cual nos permite opinar. Remarca el uso de la doctrina de la probabilidad y estudia una escala de probabilidades cuyo más alto grado permite al sabio opinar mejor.

> *No poseemos la evidencia, pero sí la probabilidad. La verdad plena y sin velos pertenece a los dioses. Nuestra inteligencia percibe apariencias más o menos confusas; no lo que es verdadero, pero sí lo probable, y esta luz tan incierta, por débil que sea, nos permite opinar. La suspensión absoluta del juicio es un estado imposible; no se puede conceder al hombre el obrar habiéndole antes prohibido juzgar. (Sexto Empírico, Esbozos Pirrónicos, Libro I, p. 129)*

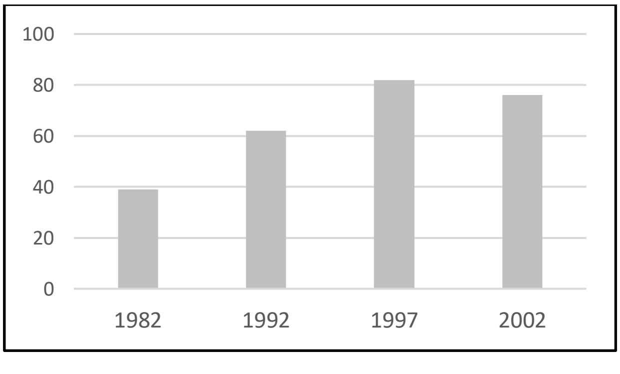
En las primeras etapas de la Revolución Industrial, las empresas se caracterizan por sus activos tangibles. Aparecen los *sistemas mecánicos,* cuyos procesos se componen de etapas en cadena que observan una relación entrada-salida predecible. La información utilizada en estos sistemas está generada por aparatos que miden variables relacionadas con el tiempo, la física o la química y, en menor escala, por la percepción humana nítida. Los sistemas mecánicos se caracterizan por ser tangibles, nítidos y precisos.

El esquema mecanicista, le ha resultado funcional al hombre para el estudio y perfeccionamiento de una diversidad de sistemas mecánicos, habiendo sido potenciado con la llegada de la computación que facilitó el surgimiento de nuevas generaciones de sistemas mecánicos (ej. navegación espacial, robótica) y el perfeccionamiento de los existentes (ej. telefonía celular).

Desde 1990, las organizaciones empiezan a crear valor sustentable mediante la potenciación de sus activos intangibles. Su funcionamiento requiere nutrirse, en forma fluida, de opiniones, criterios y decisiones generadas por hombres ubicados en distintos niveles de la escala jerárquica. Empiezan a funcionar como *sistemas humanos*, es decir, la evaluación humana participa activamente en su funcionamiento. Kaplan y Norton, profesores de la Escuela de Negocios de Harvard, lo expresan claramente:

> *Actualmente, las empresas pueden concentrar sus inversiones en capital humano y en general, sus inversiones en todos los activos intangibles para crear un valor diferenciado y sustentable. Todas las organizaciones de hoy en día crean un valor sustentable mediante la potenciación de sus activos intangibles: capital humano, base de datos y sistemas de información, procesos sensibles y de alta calidad, relaciones con los clientes y marcas, capacidad de innovación, cultura. Hace décadas que se viene observando la tendencia a alejarse de una economía impulsada por los productos y basada en los activos tangibles, para acercarse a una economía del conocimiento y de los servicios, basada en los activos intangibles. Los activos tangibles de una empresa promedio (el valor contable neto del activo menos el pasivo) representan menos del 25% del valor de mercado, es decir, los activos intangibles representan más del 75%. (Kaplan, R. y Norton, D., pp.29-30)*

Figura N° 1: Activos intangibles/Capitalización de mercado



Fuente: Kaplan, R. y Norton, D., p.31

Asimismo, actualmente, las personas que integran una empresa reciben clases de empoderamiento (*empowerment*) y trabajo en equipo (*team-working*) para actuar con mayor autonomía, potenciando su juicio, opinión y criterio. Por lo tanto, predominan las evaluaciones humanas, que operan sobre relaciones borrosas directas y binarias. Estas evaluaciones necesitan ser expresadas en un lenguaje adecuado para compartirlas con distintos niveles de la organización y documentarlas en sus sistemas de información.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. La evaluación humana

En esencia, toda información debería expresar, cualitativa o cuantitativamente, el contenido de un conocimiento dado, con los matices que correspondan. La mayoría de los contenidos son nítidos, responden a una lógica binaria y pueden ser expresados sin limitaciones por el lenguaje natural, la herramienta básica que dispone el hombre.

Asimismo, hay otros contenidos, de esencia intangible, borrosa e imprecisa, que son elaborados por la mente humana, tales como las evaluaciones, opiniones, juicios, criterios y decisiones, que de aquí en adelante llamaremos *evaluación humana*. Los sistemas que contengan evaluación humana constituyen los *sistemas humanos* o sistemas complejos, por contraste con los sistemas mecánicos.

La información de un sistema complejo se puede concebir como un flujo de valor agregado cognitivo cuya cadena de valor nace en los *datos*, los cuales se procesan y evolucionan al rango de *información*, la cual es objeto de un procesamiento superior y adquiere el rango de *conocimiento*, para culminar en la etapa final llamada *sabiduría*. Si bien en las primeras etapas la información de un sistema complejo es nítida, en su última etapa, la de mayor evolución, predomina la información borrosa. En general, un proceso decisorio finaliza con la evaluación y selección de la alternativa más adecuada, lo cual involucra gestionar relaciones borrosas. Por lo tanto, la evaluación humana merece ser estudiada rigurosamente a fin de poder ser expresada, registrada y procesada.

Por ejemplo, las *ratios financieras*, también llamadas razones o indicadores, son cocientes que se obtienen dividiendo entre sí los valores financieros directos. Ofrecen unidades de medida y comparación, las cuales permiten analizar el estado actual o pasado de una organización, en función de niveles óptimos genéricos. Las ratios constituyen la i*nformación* y los valores financieros directos son los *datos*. El conjunto de ratios, nos permite acceder al *conocimiento* de la situación de la empresa. El experto considera este *conocimiento*, la situación del país, la del rubro de la empresa y su propio expertise, para elaborar un criterio que dará lugar a una decisión. En esta última etapa, la elaboración del experto responde a un proceso borroso, intangible, impreciso.

La lógica binaria del lenguaje natural, si bien es apta para expresar contenidos nítidos y predicados precisos, no lo es para expresar contenidos borrosos, ni para formular predicados imprecisos. Por esta razón, el lenguaje natural no es apto para sistemas complejos. Esta situación la describe Lotfi Zadeh en el Principio de Incompatibilidad:

> *A medida que aumenta la complejidad de un sistema, nuestra capacidad para hacer afirmaciones precisas y relevantes, sobre su comportamiento, va disminuyendo hasta llegar a un umbral más allá del cual precisión y relevancia se convierten en características mutuamente excluyentes (Zadeh, L. (1973). pp.28-44).*

El lenguaje natural no trata la incertidumbre y es otra limitación. La evaluación humana está sujeta tanto a la calidad de las fuentes de información como al ámbito personal de un individuo: conocimientos, experiencia, enfoque, prejuicios, intuición, hipótesis, por lo que siempre habrá incertidumbre. De modo que la incertidumbre es un complemento de la evaluación humana y, por lo tanto, el lenguaje que la registre debería incluirla.

En resumen, el lenguaje natural presenta limitaciones para expresar la evaluación humana dado que no puede expresar la borrosidad ni la incertidumbre de la misma. En las próximas secciones se estudiarán estas limitaciones.

2.2. Borrosidad

El lenguaje de la evaluación humana debería poder expresar la borrosidad, lo cual es una limitación del lenguaje natural. Un tipo de borrosidad ocurre en una *relación borrosa directa*, como se muestra en el siguiente ejemplo del lenguaje natural:

> "Paula es baja"
> *Paula*: sujeto
> *es baja*: predicado borroso

Asimismo, otro tipo de borrosidad se da en una *relación borrosa binaria*, la cual expresa el grado de incidencia que una entidad tiene sobre otra. Se muestra el caso de una incidencia borrosa binaria en un automotor, expresada en lenguaje natural:

> "El sistema de frenado impacta mucho en la seguridad"
>
> *sistema de frenado*: entidad mecánica de un automotor
>
> *seguridad*: entidad perceptual del conductor
>
> *impacta mucho*: grado de incidencia borrosa

En el año 1964, ocurren una serie de fenómenos que están muy relacionados con el problema de la borrosidad. La computación está en el auge de sus comienzos. IBM[1] lanza el Sistema/360, la primera arquitectura compatible de computadoras. DEC[2] crea el sistema PDP-8, la primera minicomputadora comercialmente exitosa. En ese momento era cuestionable la capacidad de las máquinas para reconocer patrones, una gran limitación para el diseño de mecanismos inteligentes. A propósito de esa carencia, Bellman y Zadeh hacen un trabajo científico para RAND[3], en Santa Mónica, California, sobre una *teoría de reconocimiento de patrones*, grados de membresía y conjuntos con fronteras borrosas.

En 1965 Zadeh publica el trabajo Fuzzy Sets, en el que resuelve el problema de la borrosidad introduciendo el *grado de membresía* $\mu(x)$, $0 \leq \mu(x) \leq 1$, que expresa la pertenencia gradual de un elemento a un conjunto dado (ej. mujeres bajas) y lo usa como *valor de verdad* en una relación

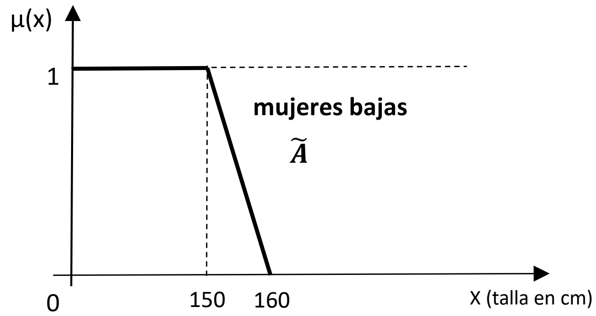
[1] International Business Machines Corporation (IBM), empresa multinacional estadounidense creada en 1911, líder en tecnología y consultoría, con sede en Armonk, Nueva York.
[2] Digital Equipment Corporation (DEC), compañía multinacional estadounidense creada en 1957, pionera en la fabricación de minicomputadores, con sede en Massachusetts. Cesó en 1998.
[3] RAND Corporation (Research ANd Development), organización privada, creada en 1948 para conectar la planificación militar con las decisiones de investigación y desarrollo.

borrosa directa. La variable X (talla) es un valor del predicado impreciso $\tilde{A}$, al cual le corresponde un valor de verdad $\mu(x)$. Ver Figura N° 2.

Zadeh creó un formalismo para gestionar la imprecisión con mayor eficiencia que el lenguaje natural. Transcribimos la definición original de un conjunto borroso $\tilde{A}$:

> *Sea X un espacio de puntos (objetos) y x un elemento genérico de X, X = {x}. Un conjunto borroso (clase) A en X está caracterizado por una función (característica) de pertenencia $f_A(x)$ que a cada punto de X asocia un número real en el intervalo [0,1], donde el valor de $f_A(x)$ en x representa el grado de pertenencia de x en A (Zadeh, 1965, p. 338).*

Figura N°2: Conjunto borroso $\tilde{\boldsymbol{A}}$



Fuente: Elaboración propia

La función de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$ expresa el grado de pertenencia o *membership degree* de un elemento $x \in X$, respecto a un conjunto borroso $\tilde{A}$ y toma cualquier valor del intervalo real [0,1] para cubrir todos los matices posibles.

Un conjunto borroso $\tilde{A}$ es un conjunto de pares ordenados $(x, \mu_{\tilde{A}}(x))$, donde a cada elemento X le corresponde un grado de pertenencia $\mu_{\tilde{A}}(x)$.

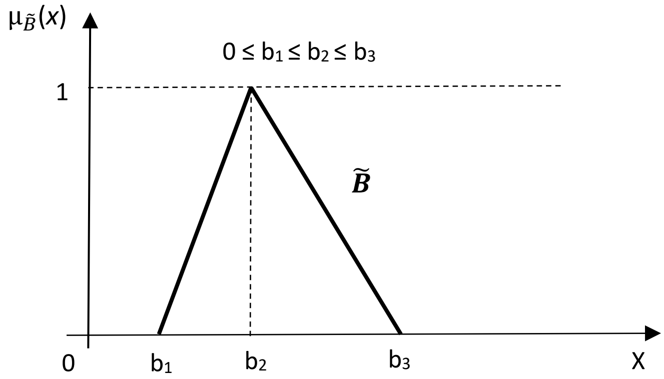
$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)), \forall\, x \in E\} \tag{1}$$

Donde:

$\mu_{\tilde{A}}$: E $\rightarrow$ [0,1] función característica de pertenencia
$\mu_{\tilde{A}}(x)$: grado de pertenencia

Asimismo, un número borroso es un conjunto borroso de los números reales, que cumple las condiciones de ser *convexo* y *normal*. Como ejemplo, consideramos el caso del número borroso triangular (NBT) $\tilde{B}$, representado en la Figura N° 3.

Figura N° 3: Número borroso triangular $\tilde{B}$



Fuente: Elaboración propia

$\tilde{B}$ es *continuo* porque su función de pertenencia $\mu_{\tilde{B}}(x)$ es continua y, además, es *positivo* porque $\mu_{\tilde{B}}(x)$ es nula para todo $X < 0$. Su función de pertenencia vale la unidad para $X = b_2$, es lineal hacia ambos lados y determina un triángulo con el eje X. El NBT $\tilde{B}$ se determina con la tripleta (b_1,b_2,b_3), donde:

b_1 = límite inferior
b_2 = valor de máxima presunción
b_3 = límite superior

Los NBT's son habitualmente preferidos para expresar magnitudes inciertas, ya que, de una forma muy rápida, dan una idea del intervalo de confianza, el valor de máxima presunción y el nivel de verdad de cada uno de los valores. Asimismo, su aritmética es muy fácil de procesar por lo que han sido muy usados, desde los orígenes de la lógica borrosa, para el tratamiento de la incertidumbre en problemas empresariales y sociales.

Los conjuntos borrosos y los números borrosos, de los cuales los NBT son un caso particular, han sido tratados por numerosos autores. Mencionamos a Lazzari, Machado y Pérez (1994, 1998); Zimmermann, H.; Klir, G. y Yuan, B.; Trillas, E., Alsina, C. y Terricabras, J.

2.3 Incertidumbre

La concepción de la certidumbre de la opinión, o grado de verdad, es un tema que se estudia desde los tiempos de los filósofos de la Antigua Grecia hasta nuestros días. Desde entonces hasta la actualidad, se acepta que el hombre puede percibir el grado de verdad que hay en sus afirmaciones, es decir, que es consciente de su incertidumbre.

A continuación, se presenta una breve cronología evolutiva al respecto.

- Platón (427 – 347 a.C.) afirmó que la opinión es una concepción que no está confirmada por la razón; es una conjetura del espíritu; una noción cuya verdad o cuya falsedad demuestra el razonamiento.

- Aristóteles (384 – 322 a.C.) denomina cosas primordiales y verdaderas a las cosas que tienen credibilidad, no por otras, sino por sí mismas; en cambio, llama cosas plausibles a las que son aceptadas, por todos, o por la mayoría, o por los más conocidos y reputados. Asimismo, admite que las cosas sometidas a incertidumbre pueden evaluarse desde lo subjetivo.

- Pirrón de Elis (360 – 270 a.C.), un pensador que estudia la duda como el tema central de su filosofía. Según Pirrón, todas nuestras percepciones son relativas, puesto que éstas solo nos retratan la realidad tal como aparecen "filtradas" por nuestros sentidos.

- Carnéades de Cirene (214 – 129 a.C.), fundador y director de la Nueva Academia, niega que al hombre le fuera posible conocer la verdad con caracteres de certeza, aunque no llegó a negar la existencia de aquélla. Carnéades reconoce que al sabio le es imposible retener siempre su juicio y desarrolla su *doctrina de la probabilidad.*

- Thomas Bayes (1702 – 1761), matemático y teólogo inglés, desarrolla teoremas matemáticos sobre la probabilidad subjetiva, los cuales han sido valiosos y han tenido una gran repercusión en la ciencia, la economía y el derecho. Es el primer matemático que estudia formalmente el concepto de probabilidad subjetiva.

- Bruno De Finetti (1906 – 1985), es unánimemente considerado como una de las figuras más relevantes en la estadística del siglo XX. Uno de sus aportes más trascendentes ha sido la formalización del concepto de probabilidad como grado de creencia, o probabilidad subjetiva, que permite un tratamiento riguroso del concepto de probabilidad que se deduce a partir de la teoría de la decisión.

- Dennis Lindley (1923 – 2013), probabilístico inglés, investigador de la teoría de la decisión y de la estadística bayesiana. Afirmó que la incertidumbre está en todas partes y no podemos escapar de ella. Llegó a expresar que la incertidumbre es un asunto personal, es decir, que no se debería hablar de "la incertidumbre" sino de "mi incertidumbre". Afirmó que "sea cual sea la forma en que se aborda la incertidumbre, la probabilidad es la *única* manera sólida de pensar en ello".

Tanto Aristóteles como Carnéades establecen, en forma separada, un criterio subjetivo para evaluar opiniones sobre cuestiones sometidas a incertidumbre. El criterio propuesto tiene la capacidad de clasificar los conocimientos, atendiendo al grado de confiabilidad de los mismos, mediante la validación subjetiva de un experto.

En general, cuando una persona emite una opinión o da una respuesta, se infiere que ella es consciente de su certeza o grado de confianza. Esta información privada, confidencial, cuya revelación hasta puede ser incómoda, siempre está disponible en la mente del sujeto y constituye el concepto de probabilidad subjetiva. Este trabajo considera que el hombre tiene la capacidad de percibir la probabilidad de que sus afirmaciones sean ciertas. Sin este don, sería imposible concebir el pensamiento racional aproximado, propio de los seres humanos, que lo distingue de las otras especies animales.

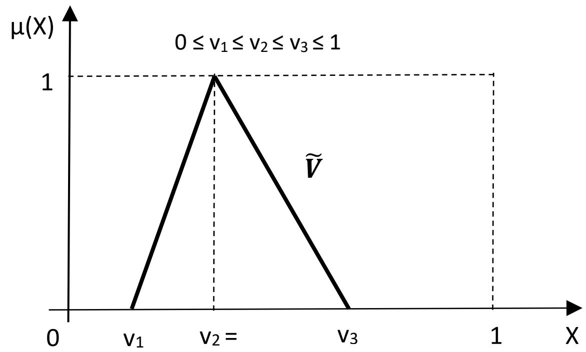
2.4. Los Números R

El objeto de este trabajo es desarrollar el operador "R (V, P)", que expresa el valor "V" de una relación borrosa, ya sea directa o binaria, complementado por la probabilidad subjetiva "P" de que ese valor sea cierto, según la percepción del experto.

R (V, P) se identifica con $\tilde{V}$ (v_1, v_2, v_3), un número borroso triangular (NBT) donde tanto el dominio X como la imagen $\mu(x)$ pertenecen al intervalo [0,1]. La evaluación humana opera sobre relaciones borrosas, directas o binarias, por lo que es válido definir el dominio X en el intervalo [0,1]. Ver Figura N°4.

$$R\ (V, P) = \tilde{V}\ (v_1, v_2, v_3),\ \ 0 \le v_1 \le v_2 \le v_3 \le 1 \tag{2}$$

Figura N°4: Número borroso triangular $\tilde{V}$



Fuente: Elaboración propia

v_1 = límite inferior
v_2 = V = máximo de presunción
v_3 = límite superior

En resumen, el operador R (V, P) incorpora el concepto de probabilidad que fuera definido por Carnéades, formalizado por Bayes y desarrollado por De Finetti, llamado probabilidad subjetiva, para expresar las relaciones borrosas con un NBT cuyo dominio X pertenece al intervalo [0,1].

Una vez que el experto define R (V, P), se puede obtener el NBT de cualquier relación borrosa, a partir de lo cual, se accede a las abundantes aplicaciones utilizadas en los campos de las ciencias sociales, políticas y económicas. Más adelante, en el marco metodológico, se procesará matemáticamente R (V, P) con $\tilde{V}$ (v_1, v_2, v_3).

3. MARCO METODOLÓGICO

La definición de Número R, R (X, V, P) comprende: X, variable que expresa una noción subjetiva respecto de una relación borrosa directa o binaria; V, cuantificación que hace un experto sobre X; P, grado de creencia percibido por el experto en el momento que expresa V, concebido como la probabilidad subjetiva de la condición X = V.

P representa la certidumbre y (1 – P) la incertidumbre.

$$R = R\ (X, V, P) = R\ (V, P) \tag{3}$$

X: variable que expresa una relación borrosa directa o binaria.

V ($0 \le V \le 1$): *máxima presunción* de X.

P ($0 \le P \le 1$): *probabilidad* que X = V.

En función de la sensibilidad perceptual, V y P se pueden expresar en distintas escalas matizadas, cada una de las cuales tiene su propia correspondencia semántica.

Quinaria: (0, 0.2, 0.5, 0.8, 1)

Endecadaria: (0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1)

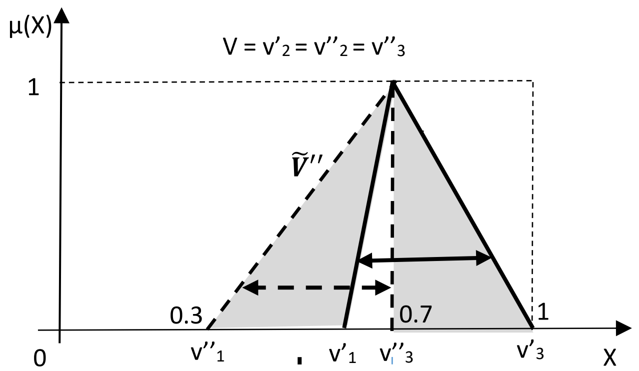
Ejemplos: (1) Un estudiante expone sobre una materia ante un profesor. X es el nivel de conocimiento verdadero del estudiante en la materia, V es el nivel de aptitud reconocido por el profesor y P es el grado de creencia del profesor sobre dicha valuación. (2) Se estudia el efecto del clima sobre la venta de helados en distintas localidades. X es la relación borrosa entre el clima y la venta de helados, V es el grado de incidencia, según el experto, y P la probabilidad subjetiva que percibe el experto respecto a X = V.

El operador R (X, V, P) define un conjunto de NBT (v_1, v_2, v_3) que cumple la restricción:

$$v_2 = V \tag{4}$$
$$(v_3 - v_1) = (1 - P) \tag{5}$$
$$0 \leq v_1 \leq V \leq v_3 \leq 1 \tag{6}$$

La Figura N° 5 muestra el NBT del extremo derecho $\tilde{V}'$ (v'_1, v'_2, v'_3) y el NBT del extremo izquierdo $\tilde{V}''$ (v''_1, v''_2, v''_3), que surgen de R (V, P). La zona gris representa el lugar geométrico de todos los NBT $\tilde{V}$ (v_1, v_2, v_3) que cumplen las expresiones (4), (5) y (6).

Figura N° 5 $\tilde{V}'$ y $\tilde{V}''$



Fuente: Elaboración propia

Consideramos el ejemplo R (0.7, 0.6) representado en la Fig. 5:

$$R\ (0.7, 0.6) \tag{7}$$

$$\tilde{V}'\ (v'_1, v'_2, v'_3) = (0.6, 0.7, 1) \tag{8}$$

$$\tilde{V}''\ (v''_1, v''_2, v''_3) = (0.3, 0.7, 0.7) \tag{9}$$

Una vez definida una relación borrosa, siempre se puede conocer R (V, P) y el NBT que la exprese en borrosidad y en incertidumbre. En función de los datos que se conozcan, hay cuatro casos posibles que se describen a continuación:

1) Se conoce V y P: relación borrosa subjetiva.
2) Se conoce V, P y v_3: relación borrosa subjetiva con la certeza v_3.
3) Se conoce V, P y v_1. relación borrosa subjetiva con la certeza v_1.
4) Se conoce (v_1, v_2, v_3). Relación borrosa objetiva (aquí se infiere P).

Caso 1: Se conoce V y P

Anteriormente se mostró el conjunto de los NBT que corresponden a R (V, P). En caso de no tener más información que V y P, se adopta un criterio simétrico y se asume una incertidumbre balanceada, a izquierda y derecha, lo cual es satisfecho por uno y solo uno de los NBT del conjunto, como se desarrolla a continuación. De la Figura N° 1 se obtienen las siguientes expresiones:

incertidumbre X: ($v_3 – v_1$)
amplitud dominio X: (1 – 0)

$$\frac{incertidumbre\ X}{dominio\ X} = \frac{v_3 - v_1}{1 - 0} = (1 - P) \tag{10}$$

Aplicamos el concepto anterior hacia ambos lados:

incertidumbre X izq.: (V – v_1)

amplitud sub-dominio X izq.: (V – 0)

$$\frac{incertidumbre\ X_{izq}}{sub - dominio\ X_{izq}} = \frac{V - v_1}{V - 0} = (1 - P) \tag{11}$$

incertidumbre X der.: (v_3 – V)
amplitud sub-dominio X der.: (1 – V)

$$\frac{incertidumbre\ X_{der}}{sub - dominio\ X_{der}} = \frac{v_3 - V}{1 - V} = (1 - P) \tag{12}$$

Operando las relaciones se obtiene (v_1, v_2, v_3) en función de (V, P),

$$v_1 = V*P \tag{13}$$

$$v_2 = V \tag{14}$$

$$v_3 = V*P + (1 - P) \tag{15}$$

$$\mathbf{(v_1, v_2, v_3) = \{V*P, V, [V*P + (1 - P)]\}} \tag{16}$$

Consultar la tabla de conversión R (V, P) a $\tilde{V}$ (v_1, v_2, v_3). Ver Tabla 1

Ejemplo: *Dado* R *(0.8, 0.7)* → $\tilde{V}$ *(0.56, 0.80, 0.86)* (17)

Caso 2: Se conoce V, P y v_3

$$(1 – P) = (v_3 – v_1) \tag{18}$$

$$v_1 = v_3 - (1 - P) \tag{19}$$

$$v_2 = V \tag{20}$$

$$V \leq v_3 \leq 1 \tag{21}$$

$$\mathbf{(v_1, v_2, v_3) = \{[v_3 - (1 - P)], V, v_3\}} \tag{22}$$

Ejemplo: *Dado* R *(0.8, 0.7) ;* $v_3 = 0.82$ → $\tilde{V}$ *(0.52, 0.80, 0.82)* (23)

Caso 3: Se conoce V, P y v_1

$$(1 - P) = (v_3 - v_1) \tag{24}$$

$$0 \leq v_1 \leq V \tag{25}$$

$$v_2 = V \tag{26}$$

$$v_3 = v_1 + (1 - P) \tag{27}$$

$$\mathbf{(v_1, v_2, v_3) = \{v_1, V, [v_1 + (1 - P)]\}} \tag{28}$$

Ejemplo: *Dado* R *(0.8, 0.7) ;* $v_1 = 0.60$ → $\tilde{V}$ *(0.60, 0.80, 0.90)* (29)

Caso 4: Se conoce (v_1, v_2, v_3)

$$\mathbf{(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3)} \tag{30}$$

$$\mathbf{R\ (V, P) = R\ [v_2, (v_3 - v_1)]} \tag{31}$$

Ejemplo: *Dado* $\tilde{V}$ *(0.60, 0.70, 0.90)* → R *(0.70, 0.70)* (32)

Tabla 1: Tabla de Conversión de R (V, P) a NBT (v_1, v_2, v_3)

NBT (v_1,v_2,v_3)		P – CERTIDUMBRE DE V										
		0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1**
V – VALUACION DE LA VARIABLE X (%)	**0**	0,00 0,00 1,00	0,00 0,00 0.90	0,00 0,00 0,80	0,00 0,00 0,70	0,00 0,00 0,60	0,00 0,00 0,50	0,00 0,00 0,40	0,00 0,00 0,30	0,00 0,00 0,20	0,00 0,00 0,10	0,00 0,00 0,00
	10	0,00 0,10 1,00	0,01 0,10 0,91	0,02 0,10 0,82	0,03 0,10 0,73	0,04 0,10 0,64	0,05 0,10 0,55	0,06 0,10 0,46	0,07 0,10 0,37	0,08 0,10 0,28	0,09 0,10 0,19	0,10 0,10 0,10
	20	0,00 0,20 1,00	0,02 0,20 0,92	0,04 0,20 0,84	0,06 0,20 0,76	0,08 0,20 0,68	0,10 0,20 0,60	0,12 0,20 0,52	0,14 0,20 0,44	0,16 0,20 0,36	0,18 0,20 0,28	0,20 0,20 0,20
	30	0,00 0,30 1,00	0,03 0,30 0,93	0,06 0,30 0,86	0,09 0,30 0,79	0,12 0,30 0,72	0,15 0,30 0,65	0,18 0,30 0,58	0,21 0,30 0,51	0,24 0,30 0,44	0,27 0,30 0,37	0,30 0,30 0,30
	40	0,00 0,40 1,00	0,04 0,40 0,94	0,08 0,40 0,88	0,12 0,40 0,82	0,16 0,40 0,76	0,20 0,40 0,70	0,24 0,40 0,64	0,28 0,40 0,58	0,32 0,40 0,52	0,36 0,40 0,46	0,40 0,40 0,40
	50	0,00 0,50 1,00	0,05 0,50 0,95	0,10 0,50 0,90	0,15 0,50 0,85	0,20 0,50 0,80	0,25 0,50 0,75	0,30 0,50 0,70	0,35 0,50 0,65	0,40 0,50 0,60	0,45 0,50 0,55	0,50 0,50 0,50
	60	0,00 0,60 1,00	0,06 0,60 0,96	0,12 0,60 0,92	0,18 0,60 0,88	0,24 0,60 0,84	0,30 0,60 0,80	0,36 0,60 0,76	0,42 0,60 0,72	0,48 0,60 0,68	0,54 0,60 0,64	0,60 0,60 0,60
	70	0,00 0,70 1,00	0,07 0,70 0,97	0,14 0,70 0,94	0,21 0,70 0,91	0,28 0,70 0,88	0,35 0,70 0,85	0,42 0,70 0,82	0,49 0,70 0,79	0,56 0,70 0,76	0,63 0,70 0,73	0,70 0,70 0,70
	80	0,00 0,80 1,00	0,08 0,80 0,98	0,16 0,80 0,96	0,24 0,80 0,94	0,32 0,80 0,92	0,40 0,80 0,90	0,48 0,80 0,88	0,56 0,80 0,86	0,64 0,80 0,84	0,72 0,80 0,82	0,80 0,80 0,80
	90	0,00 0,90 1,00	0,09 0,90 0,99	0,18 0,90 0,98	0,27 0,90 0,97	0,36 0,90 0,96	0,45 0,90 0,95	0,54 0,90 0,94	0,63 0,90 0,93	0,72 0,90 0,92	0,81 0,90 0,91	0,90 0,90 0,90
	100	0,00 1,00 1,00	0,10 1,00 1,00	0,20 1,00 1,00	0,30 1,00 1,00	0,40 1,00 1,00	0,50 1,00 1,00	0,60 1,00 1,00	0,70 1,00 1,00	0,80 1,00 1,00	0,90 1,00 1,00	1,00 1,00 1,00

Fuente: Elaboración propia

4. APLICACIONES

Los Números R (V, P) son un lenguaje que expresa la evaluación humana de una relación borrosa y la convierte en un NBT. En las aplicaciones se usa el concepto de "representación del NBT" [4], un criterio que permite ordenar a los NBTs.

[4] Lazzari, Machado y Pérez, 1998, p189.

Dado un NBT positivo $\tilde{V}$ (v_1, v_2, v_3), se llama representación de $\tilde{V}$, y se denota "$\bar{v}$", a la expresión:

$$\bar{v} = \frac{v_1 + 2v_2 + v_3}{4} \tag{33}$$

A continuación, se presentan algunas aplicaciones, dejando aclarado que la variedad mostrada no es limitativa.

4.1. Evaluaciones de un examen oral

Supongamos el caso de cuatro estudiantes que dan un examen oral y el profesor los califica con Números R (V, P), lo cual conduce a un NBT como resultado del examen.

A continuación, se expresa la calificación o evaluación en Números R (V, P), de los alumnos A, B, C y D, su NBT y su correspondiente representación.

Alumno A → R (V_A, P_A) = R (0.8, 0.9) ≡ $\tilde{V}$ (0.72, 0.80, 0.82) ≡ $\bar{a} = \mathbf{0{,}785}$ (34)

Alumno B → R (V_B, P_B) = R (0.8, 0.5) ≡ $\tilde{V}$ (0.48, 0.80, 0.88) ≡ $\bar{b} = \mathbf{0{,}765}$ (35)

Alumno C → R (V_C, P_C) = R (0.7, 1.0) ≡ $\tilde{V}$ (0.70, 0.70, 0.70) ≡ $\bar{c} = \mathbf{0{,}700}$ (36)

Alumno D → R (V_D, P_D) = R (0.8, 0.3) ≡ $\tilde{V}$ (0.24, 0.80, 0.94) ≡ $\bar{d} = \mathbf{0{,}695}$ (37)

- El valor V de los alumnos A, B y D son iguales (0.8), pero la certidumbre P de A (0.9) es mayor que la de B (0.5) y ésta es mayor que la de D (0.3). Por lo tanto, el resultado de A es mejor que el de B y éste mejor que el de D.

- Si bien el valor V del alumno D (0.8) fue mayor al del alumno C (0.7); la certidumbre P de C (1.0) es mucho mayor que la de D (0.3). En consecuencia, el resultado de C es mejor que el de D, a pesar de tener un valor menor.

4.2. Opinión grupal de un ateneo médico

Diez cardiólogos se reúnen en un ateneo y tratan un caso real de un paciente que padece una cardiopatía. Se realiza una exposición detallada del caso y, al finalizar la misma, cada uno opina sobre qué decisión recomienda tomar entre 3 alternativas posibles.

- X: Agenda de vida restringida.
- Y: Angioplastia. Se colocan 3 stents coronarios.
- Z. Cirugía. Se hace un by-pass coronario.

Tabla 2.- Tabla de Evaluación (V, P)

Grado de Recomendación			**Grado de Certidumbre**	
V	**Semántica**		**P**	**Semántica**
1.0	Totalmente recomendable		1.0	Totalmente cierto
0.8	Bastante recomendable		0.8	Bastante cierto
0.6	Medianamente recomendable		0.6	Medianamente cierto
0.4	Poco recomendable		0.4	Poco cierto
0.2	Muy Poco recomendable		0.2	Muy Poco cierto
0	Nada recomendable		0	Nada cierto

Fuente: Elaboración propia

Cada cardiólogo deberá optar por una alternativa y su posición la deberá expresar con Números R (V, P), según la Tabla 2. Asimismo, se considerará el concepto de representación del NBT para procesar la información. A continuación, se presenta las posiciones de los cardiólogos, indicando la alternativa elegida y seguidamente su recomendación en Números R.

$$C01 \rightarrow Z\ ;\ R\ (0.6,\ 0.6) \equiv \tilde{V}\ (0.36,\ 0.60,\ 0.76) \equiv \bar{z} = 0{,}580 \tag{38}$$

$$C02 \rightarrow Y\ ;\ R\ (0.8,\ 0.8) \equiv \tilde{V}\ (0.64,\ 0.80,\ 0.84) \equiv \bar{y} = 0{,}770 \tag{39}$$

$$C03 \rightarrow Z\ ;\ R\ (0.5,\ 0.4) \equiv \tilde{V}\ (0.20,\ 0.50,\ 0.80) \equiv \bar{z} = 0{,}500 \tag{40}$$

$$C04 \rightarrow Z\ ;\ R\ (0.6,\ 0.7) \equiv \tilde{V}\ (0.42,\ 0.60,\ 0.72) \equiv \bar{z} = 0{,}585 \tag{41}$$

$$C05 \rightarrow X\ ;\ R\ (0.9,\ 0.9) \equiv \tilde{V}\ (0.81,\ 0.90,\ 0.91) \equiv \bar{x} = 0{,}880 \tag{42}$$

$$C06 \rightarrow Y\ ;\ R\ (0.8,\ 0.9) \equiv \tilde{V}\ (0.72,\ 0.80,\ 0.82) \equiv \bar{y} = 0{,}785 \tag{43}$$

$$C07 \rightarrow Y\ ;\ R\ (0.8,\ 0.8) \equiv \tilde{V}\ (0.64,\ 0.80,\ 0.84) \equiv \bar{y} = 0{,}770 \tag{44}$$

$$C08 \rightarrow X\ ;\ R\ (0.8,\ 0.8) \equiv \tilde{V}\ (0.64,\ 0.80,\ 0.84) \equiv \bar{x} = 0{,}770 \tag{45}$$

$$C09 \rightarrow Y\ ;\ R\ (0.8,\ 1.0) \equiv \tilde{V}\ (0.80,\ 0.80,\ 0.80) \equiv \bar{y} = 0{,}800 \tag{46}$$

$$C10 \rightarrow Z\ ;\ R\ (0.7,\ 0.5) \equiv \tilde{V}\ (0.35,\ 0.70,\ 0.85) \equiv \bar{z} = 0{,}650 \tag{47}$$

$$\sum \bar{\boldsymbol{x}} = 0.880 + 0.770 = \mathbf{1.65} \tag{48}$$

$$\sum \bar{\boldsymbol{y}} = 0.770 + 0.785 + 0.770 + 0.800 = \mathbf{3.125} \tag{49}$$

$$\sum \bar{\boldsymbol{z}} = 0.580 + 0.500 + 0.585 + 0.650 = \mathbf{2.315} \tag{50}$$

La alternativa Y (Angioplastia) cuenta con la mayor adhesión del ateneo.

4.3 Teoría de los efectos olvidados

Una forma de estudiar el comportamiento de los sistemas complejos es a través de las matrices de incidencia. Expresan el efecto que produce, o la incidencia que tiene, un conjunto de entidades, pertenecientes al sistema, sobre otro conjunto o sobre sí mismo.

La Teoría de los Efectos Olvidados (Kaufmann & Gil-Aluja, 1989) es una herramienta de gran valor analítico, que trata el concepto de incidencia con formalidad científica, procesa la matriz de incidencias y, finalmente, advierte sobre las eventuales inconsistencias detectadas en la valuación de incidencias (Gento, Lazzari y Machado, 2001).

Las incidencias que opera esta teoría son relaciones borrosas binarias que se establecen entre las entidades que describen el sistema y se expresan por la evaluación de un experto. En la teoría clásica, el experto solo brinda la máxima presunción de la relación borrosa bipolar y no hace mención alguna de P, la certidumbre de V, lo cual se considera una evaluación incompleta.

En caso de que el experto brinde R (V, P), se obtiene el NBT $\tilde{V}$, identificado con la tripleta (v_1, v_2, v_3). En el trabajo antes mencionado, el caso de incidencias expresadas con tripletas, está tratado y resuelto con ejemplos, por lo que la Teoría de Recuperación de Efectos Olvidados es apta para ser procesada con Números R.

CONCLUSIÓN

Los Números R (V, P) constituyen un lenguaje que permite a un experto evaluar una relación borrosa directa o binaria, a partir de su máxima presunción y de su probabilidad subjetiva para expresarla en un NBT.

La evaluación humana clásica es incompleta, pues solo responde a la máxima presunción y descarta la percepción humana de la incertidumbre, es decir, responde al concepto primitivo de los conjuntos borrosos. En cambio, la evaluación con Números R es más completa, pues incorpora la percepción humana de la incertidumbre y la expresa con un NBT. Asimismo, se destaca que los NBT se usan en una gran cantidad de aplicaciones para el tratamiento práctico de la incertidumbre. Queda por explorar el campo de la modelización con Números R.

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

De Finetti, B. (1972). *Probability, induction and statistics: The art of guessing*. London. Ed. J. Wiley.

______ (1974a). *Theory of probability: A critical treatment*, Vol. 1. New York: Wiley.

______ (1974b). *Theory of probability: A critical treatment*, Vol. 2. New York: Wiley.

Dubois, D. y Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications*. Nueva York. Academic Press,

García Gual, C. (1982). *Aristóteles, Tratados de Lógica*. Madrid. Ed. Gredos.

______ (2007). *Platón*. Madrid. Ed. Gredos.

Gento, A.; Lazzari, L. y Machado, E. (2001). *Reflexiones acerca de las matrices de incidencia y de la recuperación de efectos olvidados*. Cuadernos del CIMBAGE, No. 4, pp. 11-27.

Kaplan, R. y Norton, D. (2004). *Mapas Estratégicos: Convirtiendo los activos intangibles en resultados tangibles*. Madrid: Edición Gestión 2000. pp. 29-31

Kaufmann, A. y Gil Aluja, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Madrid. Editorial Ceura.

______ (1989). *Modelos para la investigación de efectos olvidados*. Santiago de Compostela: Editorial Milladoiro. pp. 51-52

______ (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*. Madrid. Editorial Ceura.

Klir, G. y Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications*. Nueva Jersey. Prentice-Hall PTR,

Lazzari, L.; Machado, E. y Pérez R. (1994). *Matemática borrosa*, Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

______ (1998). *Teoría de la decisión fuzzy*, Buenos Aires, Ediciones Macchi. pp. 106-196

Lindley, D. (2006). *Understanding uncertainty*, London, Ed: J. Wiley.

______ (2008). *Uncertainty. Einstein, Heisenberg, Bohr, and the Struggle for the Soul of Science*. Nueva York. Knopf Doubleday Publishing Group.

Sexto Empírico (1993). *Esbozos pirrónicos*. Madrid. Editorial Gredos.

Trillas, E.; Alsina, C. y Terricabras, J. (1995). *Introducción a la lógica borrosa*. Barcelona. Ariel.

Zadeh, L.A. (1965). *Fuzzy Sets*. Information and Control, 8.

______ (1973). *Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Systems*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-1.

______ (2011a). *A Note on Z-numbers*. Information Sciences, 181, pp. 2923-2932.

______ (2011b). *The concept of a Z-number – a new direction in uncertain computation*. Proceedings of the IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, (IRI) Las Vegas, USA.

Zimmermann, H. (1991). *Fuzzy set theory and its applications*. Boston. Kluwer Academic Publishers.