REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN MODELOS MATEMATICOS APLICADOS A LA GESTION Y LA ECONOMIA AÑO 5 (2018)

CMA CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN METODOS CUANTITATIVOS APLICADOS A LA ECONOMÍA Y LA GESTIÓN
IADCOM - UBA

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas

LATINDEX
http://www.latindex.org/latindex/ficha?folio=2751

http://www.economicas.uba.ar/institutos_y_centros/revista-modelos-matematicos/

# EL PROGRAMA DE "ECONOMÍAS DISTRIBUCIONALES" DE JULIO H. G. OLIVERA

Rodríguez, Eduardo A.

*Universidad de Buenos Aires, Av. Córdoba 2122 - 1120AAQ - Ciudad Autónoma de Buenos Aires, República Argentina.*

*edalro@hotmail.com*

## Resumen

Recibido: 01-06-2017

Aceptado: 10-08-2017

**Palabras clave**

Distribuciones, Olivera, hermenéutica

Se analiza el programa de "economías distribucionales" de Julio H. G. Olivera tanto a nivel conceptual como sus consecuencias epistemológicas



ISSN (En línea) 2362 3225

# THE PROGRAM OF "DISTRIBUTIONAL ECONOMIES" OF JULIO H. G. OLIVERA

## Abstract

**KEYWORDS**

Distributions,

Olivera,

hermeneutics

The program of "distributional economies" of Julio H. G. Olivera is analyzed, with special emphasis on its epistemological consequences.



ISSN (En línea) 2362 3225

## INTRODUCCIÓN

Es prácticamente imposible entender el programa de economías distribucionales de Olivera sin conocimientos previos de topología, no solo en lo que se refiere a los elementos, sino también a sus métodos. Esto se debe fundamentalmente a que Olivera tomó como punto de partida la ciencia económica "tal cual estaba" para, a partir de allí, iniciar y desarrollar el programa.

El centro del aporte de Olivera se funda en la relación topológica existente entre las llamadas funciones generalizadas de Schwartz o distribuciones de Schwartz con las tradicionales funciones continuas ampliamente utilizadas en economía matemática. Esta relación topológica viene determinada por homeomorfismos existentes entre subespacios de estos espacios topológicos, dotados de topologías apropiadas. Cabe destacar que en topología, la demostración de existencias de homeomorfismos da un estatus de "igualdad topológica" a los espacios o subespacios sobre los cuales éstos se definen, independientemente de que se puedan tratar de objetos matemáticos diferentes.

Por aplicación de una fórmula inspirada en la integración por partes, es posible definir de manera distribucional la derivada de cualquier función, sea ésta derivable en sentido usual o no. Así es como suelen aparecer las llamadas "distribuciones singulares", siendo la más conocida la "medida de Dirac", derivada distribucional de la llamada "función de Heaviside" que toma valores 0 para números negativos y 1 para el resto de la recta real. Así, una función discontinua, al ser considerada como distribución, posee derivadas de todos los órdenes. Para el caso de funciones diferenciables en sentido usual, la derivada distribucional y la derivada común coinciden.

Por otra parte, los espacios de distribuciones tienen otra propiedad deseable en economía: el cumplimiento de la propiedad de Heine-Borel, no usual en espacios de dimensión infinita. Esto quiere decir que, sobre conjuntos cerrados, los conjuntos acotados son también compactos. Así, la acotación de conjuntos, central en una ciencia que trata sobre la escasez, implica la compacidad de los mismos, con propiedades matemáticas muy deseables, principalmente en todo lo que implique la determinación de equilibrios.

De esta manera, debido a las características que presentan las distribuciones, su aplicación al estudio de fenómenos económicos luce apropiado para considerar tanto los ajustes discontinuos relacionados con las situaciones de cambio estructural, como los ajustes marginales asociados a la idea de tendencia.

## 1. ETAPAS DEL PLAN DE OLIVERA

En la visión del propio Olivera las etapas del plan distribucional serían dos, tal como se enuncia en la introducción de "*Crecimiento balanceado en economías distribucionales*" (Olivera 2009):

- *Estática (Hasta 2009):* Involucra los trabajos de economías distribucionales asociados al equilibrio general como así también sus aportes posteriores a la teoría matemática de los espacios de distribuciones.

- *Dinámica (2009 en adelante):* En donde se estudia la generalización distribucional de los modelos económicos dinámicos, con nuevos aportes a la teoría matemática vinculados a las ecuaciones diferenciales y temas conexos.

Sin embargo, para el análisis e importancia del plan, consideramos una interpretación alternativa de tres etapas, más útil en nuestra opinión:

- *Formación (1960-1984):* Desde la década de 1960 hasta los momentos previos a la primera publicación de economías distribucionales de 1984.

- *Generalización (1984-1994):* Implicaría un período de unos 10 años, entre el primer trabajo de 1984 y el último de 1994 sobre equilibrio social.

- *Desarrollo (desde 1994 en adelante):* Tal vez la más prometedora en nuestra opinión. Consiste en una serie de comunicaciones, por lo general informadas a la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires, que involucra el desarrollo de elementos matemáticos vinculados con las distribuciones.

Respecto del programa distribucional, Manuel Fernández López afirmaba que "su programa fue traducir, a través de las funciones generalizadas, los fundamentos del análisis económico a economía distribucional… Es un replanteo de la ciencia económica desde los cimientos mismos." (Fernández López, 2000, pg. 176) De hecho, este objetivo es expuesto por el mismo Olivera en la introducción de todos sus trabajos de economías distribucionales.

Si bien esto es indudablemente cierto, visto el programa en su conjunto, tal descripción sería la característica saliente de lo que aquí vamos a definir como la segunda de tres etapas del programa (o la primera etapa en la visión de Olivera). Sin embargo, en el presente trabajo tratamos de mostrar que, a pesar de la relevancia del aporte, tal vez sea la tercera etapa la más interesante y profunda de todo el programa. Así visto, la generalización de la teoría económica con distribuciones podría considerarse como un notable y muy importante punto de partida.

## PRIMERA ETAPA: FORMACIÓN

Cuenta Fernández López en el libro antes mencionado que en Argentina la teoría de las distribuciones de Schwartz "encontró su propulsor en la Universidad de Buenos Aires en Alberto González Domínguez, discípulo, colaborador y continuador de la obra de Julio Rey Pastor" y que desde 1950 "el Instituto de Matemática se convirtió en un foco de "distribucionistas"." (Fernández López pgs. 175-176).

En este contexto, Fernández López recuerda que "Olivera trabajó un semestre en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y otro en la de Ciencias Económicas" y especula que tal vez fuera esta labor interdisciplinaria la que permitiera "germinar la idea de un "nuevo trato" hacia los grandes capítulos del análisis económico." (Fernández López, 2000, pg. 176). Según el mismo Olivera en conversaciones informales sobre el tema, su interés sobre la teoría de las distribuciones habría surgido en la década de 1960.

De esta manera, esta primera etapa consistiría en el interés de Olivera en la teoría de las distribuciones, su formación en estos temas (que incluye el estudio necesario de elementos de topología, teoría de la medida y análisis funcional) y, consecuentemente, la evaluación de la factibilidad del programa.

Habría que esperar hasta 1984 para conocer el primer trabajo de economías distribucionales.

## SEGUNDA ETAPA: GENERALIZACIÓN

Como ya hemos mencionado en la introducción, durante esta etapa, Olivera reformuló los principales tópicos de la teoría económica utilizando las distribuciones de Schwartz. Esto le permitió abordar los clásicos problemas de la microeconomía sin necesidad de restringirse al uso de funciones diferenciables y sin renunciar a los beneficios que brinda la continuidad.

El primer trabajo en el cual Olivera aplicó las distribuciones al estudio de fenómenos económicos es "*Producción y tiempo: teoría distribucional*" del año 1984. En este artículo, en el que un mismo bien en diferentes momentos del tiempo es considerado como bienes diferentes, se generaliza el modelo insumo-producto de Leontief. La consecuencia natural de este trabajo resulta ser "*Conjuntos de producción distribucionales*" de 1986 donde, utilizando los resultados de su anterior estudio, se llega a la función de oferta de un determinado bien.

En "*Conjuntos de consumo distribucionales*", de 1988, se generaliza la caracterización de las actividades de consumo, incluyendo la representación numérica continua de las preferencias de los consumidores.

El problema del equilibrio es tratado en "*Economías distribucionales*" en 1990, donde la principal generalización proviene de la demostración de la existencia de equilibrio en un espacio de dimensión infinita, el espacio de distribuciones, utilizando los supuestos tradicionales para el caso de espacios de dimensión finita. La cuestión de la existencia de equilibrio con mercados incompletos es analizada, en términos distribucionales, en "*Economías distribucionales y puntos fijos grassmanianos*", también publicado en 1990, mientras que en "*Economías distribucionales con un continuo de agentes*", del año 1992, se trata el caso de la competencia perfecta.

En "*Economías distribucionales y equilibrio social*", publicado en 1993, y en una versión posterior presentada al año siguiente en la AAEP bajo el nombre de "*El enfoque distribucional de los hechos económicos*", son las acciones económicas, y no los bienes, las representadas con distribuciones. La idea motora de dichos trabajos es contemplar el problema del desarrollo, al permitir que las acciones económicas puedan presentar comportamientos discontinuos a lo largo del tiempo. A partir de dichas premisas el estudio se centra en la existencia del equilibrio social, noción que comprende tanto las operaciones de mercado como las acciones no mercantiles dirigidas a obtener ventajas económicas.

Pasarían quince años para que Olivera revisitara las economías distribucionales con su trabajo "*Crecimiento balanceado en economías distribucionales*". Sin embargo, para poder escribir este último trabajo, Olivera debió sortear un importante obstáculo teórico de las distribuciones: la imposibilidad de definir el producto multiplicativo de dos distribuciones cualesquiera.

## TERCERA ETAPA: DESARROLLO

Luego de continuar explorando los espacios de distribuciones en los trabajos *"Espacios bornológicos de distribuciones"* de 1998, *"On Bounded Sets of Distributions"* y "*Conjuntos acotados de distribuciones y espacios de funciones vectoriales"*, ambos de 1999, y su posterior *"Álgebras vectoriales topológicas generadas por espacios de distribuciones"* publicado año después, Olivera presenta ante la AAEP en la Reunión Anual de 2001 *"Funciones vectoriales y producto funcional de distribuciones"*. Este último será un trabajo pivotal, en el cual el problema del producto multiplicativo de distribuciones quedaba claramente acotado al demostrar que el producto multiplicativo de dos distribuciones arbitrarias "existe siempre como función (y, por tanto, distribución) vectorial." Dos teoremas serían centrales para la demostración de este resultado, a saber:

- *Teorema de Komura*: Un espacio localmente convexo es nuclear si y solo si es isomorfo a un subespacio del producto $(s)^M$, donde $s$ es el espacio de sucesiones de decrecimiento rápido y $M$ un conjunto de índices adecuado. (Komura-Komura, 1966, pg. 287)

- *Corolario de Trèves*: El espacio de distribuciones $D'$ es nuclear. (Trèves, 1967, pg. 530)

Olivera llega al resultado antes mencionado explotando la propiedad que tienen los espacios de distribuciones $D'$ de ser espacios nucleares. Siendo $s$ el espacio de las sucesiones rápidamente convergentes, que es linealmente homeomorfo al espacio $C^{(\infty)}[-1,1]$ de funciones infinitamente diferenciables definidas en el intervalo $(-1,1)$ que con todas sus derivadas pueden extenderse continuamente a $[-1,1]$, utiliza el teorema de Komura para demostrar la existencia de un homeomorfismo lineal entre $D'$ y un subespacio de $s^M$ para un conjunto de índices $M$ convenientemente elegido. Llamando $T$ al espacio de funciones vectoriales $\left(C^{(\infty)}[-1,1]\right)^M$, espacio que contiene a $D'$, el resto del trabajo consiste en demostrar que $T$ es un álgebra de Montel localmente m-convexa y completa respecto a la multiplicación habitual de funciones. Esto equivale a afirmar, entre otras cosas, que el producto de dos distribuciones cualesquiera existe siempre como función vectorial, es decir como elemento de $T$.

Es importante resaltar la "astucia" de la demostración, dado que es producto de un agudo estudio del análisis funcional en general como de la teoría de las distribuciones en particular. Laurent Schwartz, en su célebre obra "*Théorie des Distributions*" (Schwartz, 1966), no hacía referencia a que los espacios distribucionales fueran espacios nucleares. Por otra parte, en el mismo año también aparece publicado en su original alemán el teorema de Komura. Sería en la obra de Trèves, publicada un año después, donde se pondrá de manifiesto que los espacios de distribuciones son efectivamente espacios nucleares. De esta manera, "uniendo los puntos", Olivera pudo aplicar el teorema de Komura a los espacios de distribuciones, permitiéndole definir así el producto arbitrario de distribuciones mediante el uso del producto usual de funciones.

Olivera refinaría el resultado de 2001 en su trabajo de 2006 *"Algebras y polinomios distribucionales"* al demostrar que, cuando el producto de distribuciones definido en 2001 se limita a una parte acotada de $D'$, puede reemplazarse $s^M$ por $s$. De esta manera, *sobre conjuntos acotados de distribuciones, las distribuciones pueden multiplicarse de igual manera que las funciones.*

A su vez, en *"Álgebras distribucionales funcionalmente continuas"*, publicado en 2008, demostraría que $D'$ y $T$ son linealmente homeomorfos y que $D'$ es un álgebra topológica completa funcionalmente continua cuando se lo dota con la estructura multiplicativa usual de $T$. Esto lo llevaría a concluir que la multiplicación de distribuciones de $D'$ inducida por el álgebra topológica $T$: *"satisface los criterios conceptuales de una buena multiplicación de distribuciones: 1) la operación está definida para dos distribuciones cualesquiera; 2) el resultado es siempre una distribución."* (Olivera 2008, pg. 113).

Luego vendrá un trabajo central en esta etapa, *"Ceros de Polinomios distribucionales"* de 2009, que, con los resultados de 2006 y 2008, pule su trabajo *"Polinomios distribucionales"* de 2003. Allí se demuestra que los polinomios en distribuciones sin término constante con relación a una familia de funciones definidas sobre subálgebras de $T$ generadas por un conjunto acotado de distribuciones se anulan en un ideal cerrado, metrizable y separable, de dimensión infinita. Este resultado lo llevaría a Olivera a afirmar en la primera versión de 2003 lo siguiente:

*"Si se identifica el cero del cuerpo de coeficientes con el origen del espacio de distribuciones, todo polinomio distribucional puede contemplarse desde el punto de vista del valor económico como la función de demanda excedente de una economía distribucional. Los ceros del polinomio distribucional representan entonces las situaciones de equilibrio"* (Olivera 2003, pg. 42) para luego concluir que: *"Desde el ángulo epistemológico la indeterminación del equilibrio implica que la ciencia económica, ciencia de interpretación, no es intrínsecamente ciencia de predicción*" (Olivera 2003, pg. 42).

Es conveniente aclarar qué dice y qué no dice el resultado principal de este trabajo para no dar lugar a confusión como así tampoco a generalizaciones inexactas. En principio, la infinidad de raíces en esta clase de polinomios, no es tan extraña en una variedad de casos. Para ello, basta pensar en polinomios que pueden expresarse como sumatorias de formas lineales elevadas a distintas potencias. Como es usual que los núcleos de las formas lineales tengan dimensión mayor que 1, es evidente que las raíces de tales polinomios se encontrarán en la intersección de los núcleos de todas estas formas lineales. Si ninguno de ellos tiene núcleo de dimensión 0, y estos núcleos tienen intersección no-vacía, entonces la cantidad de raíces de dicho polinomio es infinita.

Ignacio Zalduendo, en su trabajo "*Ceros de polinomios sobre espacios de Banach*" (Zalduendo, 1999), había demostrado que los polinomios en infinitas variables definidos sobre espacios de Banach complejos infinito-dimensionales se anulan en un subespacio de dimensión infinita; es decir que no sólo se pone de manifiesto la infinidad de raíces, sino la infinidad de la dimensión del espacio a las cuales cada una pertenece. Sin embargo, este resultado era mucho más limitado para el caso de polinomios reales, circunscripto a polinomios de grado 2, y no siempre. Cabe destacar que el resultado de Olivera no necesita hacer distinción entre caso complejo o caso real, habilitando así su aplicación al ámbito económico.

Si bien la infinidad dimensional de las raíces de los polinomios distribucionales a los que hace referencia Olivera se encuentra demostrada sólo para polinomios distribucionales sin término constante y no para todo tipo de polinomio distribucional, esto en principio sería "corregible" mediante una operación de traslación. Al respecto, como señalara Olivera es precisamente la propiedad que tienen las funciones de demanda excedente de poder ser representadas como polinomios distribucionales la que permite inferir la infinidad de situaciones de equilibrio y, por ende, la imposibilidad intrínseca de asociar "situación de equilibrio" con "predicción".

Luego vendrían una serie de trabajos más enfocados a la generalización de la teoría económica dinámica (la "segunda etapa" de las economías distribucionales en la propia visión de Olivera):

- *"Crecimiento balanceado en economías distribucionales"* del año 2009, trabajo estrictamente económico, mencionado más arriba, en donde se demuestra que la relación de von Neumann entre la tasa de crecimiento económico y la tasa de ganancia rige asimismo en procesos discontinuos de acumulación del capital. Este sería el primer y único trabajo de Olivera en economías distribucionales con enfoque macroeconómico y, a su vez, también el primero en generalizar teorías económicas con metodologías dinámicas de origen.

- *"Soluciones distribucionales de ecuaciones diferenciales ordinarias"* publicado en 2010, donde muestra la generalización inmediata de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias cuando se utiliza el producto distribucional de 2001;

- *"Puntos fijos en espacios de distribuciones"* de 2011, en el cual se muestra que todo conjunto acotado maximal de distribuciones tiene la propiedad de punto fijo;

- *"Puntos fijos en espacios nucleares"*, también de 2011, donde el resultado anterior se extiende a todo espacio nuclear semicompleto;

- *"La transformación de Fourier en espacios nucleares"*, del año 2013, en donde se demuestra que transformación de Fourier es aplicable a todo espacio nuclear (y por lo tanto a los espacios de distribuciones) y que en cada espacio nuclear la transformación de Fourier define un isomorfismo topológico.

- *"Linealidad y convolución en espacios nucleares",* publicado en 2014, donde utilizando los resultados del trabajo anterior se obtiene una extensión del producto de convolución.

En definitiva, en esta tercera etapa (ver Apéndice), Olivera estudió matemáticamente las estructuras topológicas de los principales espacios de distribuciones de Schwartz profundizando en ellas, definió un producto de distribuciones compatible con el producto de funciones usual y mostró, como resultado matemático y derivado rigurosamente de sus aportes, que la ciencia económica sólo puede ser de interpretación. De esta manera, esta tercera etapa del programa vino a expresar de manera rigurosa su visión de la economía como "hermenéutica social". Como afirmara en "*Realidad e idealidad en la ciencia económica*":

*"El estudio de la actividad económica envuelve así ineludiblemente una labor interpretativa. La ciencia que trata de la actividad económica, la ciencia económica, es por consiguiente una ciencia de interpretación, una hermenéutica, y en virtud de la naturaleza de su objeto, una hermenéutica social." (Olivera 1997, pg. 192)*

## CONCLUSIONES

Si bien se encuentra bastante difundido que el principal objetivo del programa de economías distribucionales de Olivera consistió en una traducción de los fundamentos del análisis económico al ámbito de las distribuciones de Schwartz, más generales que las funciones continuas utilizadas habitualmente en economía, consideramos aquí que tal vez no fue ese el aporte más importante del programa cuando se lo considera en su totalidad.

El estudio matemático de las teorías de las distribuciones y sus aportes al estudio del producto distribucional llevó a Olivera casi de inmediato, al problema de los polinomios y, en definitiva, de las ecuaciones más utilizadas en economía matemática si se recuerda las aproximaciones polinómicas de Taylor de las funciones continuas infinitamente diferenciables en el marco del cálculo diferencial tradicional.

La demostración desde el ámbito distribucional de que las raíces de los polinomios sin término constante son infinitas, y aceptándose las economías distribucionales como verdadera generalización de la economía matemática tradicional, permitió a Olivera expresar en términos rigurosos la indeterminación intrínseca de los ejercicios de predicción de la ciencia económica. Un resultado matemático con conclusiones fuertemente epistemológicas.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FERNÁNDEZ LÓPEZ, M. (2000): *Cuestiones económicas argentinas*. AZ Editora. Buenos Aires.

KOMURA, T. – KOMURA Y. (1966): *Über die Einbettung der nucklearen Räume in* $(s)^A$". Mathematische Annalen 162. Pp. 284-288. Recuperado de: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-85997-7_18

Olivera J. H. G. (1984): *Producción y tiempo: teoría distribucional*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo 36, pp.93-95. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1986): *Conjuntos de producción distribucionales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo 38, pp.49-56. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1988): *Conjuntos de consumo distribucionales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo 40, pp. 213-216. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1990a): *Economías distribucionales*. Revista de la Unión Matemática Argentina. Vol. 35, pp. 105-109. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1990b): *Economías distribucionales y puntos fijos grassmannianos*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo 42, pp. 141-142. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1992): *Economías distribucionales con un continuo de agentes*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo 43, pp. 81-86. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1993): *Economías distribucionales y equilibrio social*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo 45, pp. 339-342. Buenos Aires.

Olivera J. H. G. (1994): *El enfoque distribucional de los hechos económicos*. Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, XXIX Reunión Anual. Tomo 4, pp. 1113-1122. Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de La Plata. La Plata. Recuperado de: http://www.aaep.org.ar/anales/works/works1994/OliveraJulio.pdf

Olivera J. H. G. (1997): *Hacia una macroeconomía distribucional. Comentario del trabajo "Comercio internacional y cambio estructural (un enfoque matemático) de Eduardo A. Rodríguez*. Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, XXXII Reunión Anual. Comentarios y réplicas (en imprenta). Departamento de Economía de la Universidad Nacional del Sur. Bahía Blanca.

Olivera J. H. G. (1997): *Realidad e idealidad en la ciencia económica*. En *Economía y hermenéutica*. Caseros, Argentina. Editorial de la Universidad Nacional de Tres de Febrero. pp. 191-198.

OLIVERA J. H. G. (1998): *Espacios bornológicos de distribuciones*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XXXII. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/OLIVERA98.pdf

OLIVERA J. H. G. (1999a): *On Bounded Sets of Distributions*. The Twelfth World Congress of the International Economic Association. Contributed Paper. Buenos Aires.

OLIVERA J. H. G. (1999b): *Conjuntos acotados de distribuciones y espacios de funciones vectoriales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XXXIII. pp. 341-346. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/OLIVERA99.pdf

OLIVERA J. H. G. (2000): *"Álgebras vectoriales topológicas generadas por espacios de distribuciones"*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires. Separata. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/OLIVERA00.pdf

OLIVERA J. H. G. (2001): *Funciones vectoriales y producto funcional de distribuciones*. Anales de la Asociación Argentina de Economía Política, XXXVI Reunión Anual. Universidad del Centro de Estudios Macroeconómicos (CEMA). Buenos Aires. También en Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XXXV, Vol 1 (2001), pp. 459-464. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/OLIVERA01.pdf

OLIVERA J. H. G. (2003): *Polinomios distribucionales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Económicas XLVIII, pp. 39-42.

OLIVERA J. H. G. (2004): *Multiplicadores de Lagrange sobre espacios de distribuciones*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Económicas XLIX. pp. 77-81. Recuperado de: http://www.anceargentina.org/site/trabajos/MULTIPLICADORES%20DE%20LAGRANGE.pdf

OLIVERA J. H. G. (2006): *Álgebras y polinomios distribucionales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires L. pp. 105-109. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/OLIVERA06.pdf

OLIVERA J. H. G. (2008): *Álgebras distribucionales funcionalmente continuas*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires LII. pp. 109-114. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/2008AnalesANCBA-06.pdf

Olivera J. H. G. (2009): *Ceros de polinomios distribucionales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XLIII. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/Olivera09.pdf

Olivera J. H. G. (2009): *Crecimiento balanceado en economías distribucionales*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias Económicas. Separata.

Olivera J. H. G. (2010): *Soluciones distribucionales de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XLIV. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/FILE/Olivera.pdf

Olivera J. H. G. (2011a): *Puntos fijos en espacios de distribuciones*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XLV. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/FILE/(2011)ANCBA.Olivera.%E2%80%A2%C2%A4ant.pdf

Olivera J. H. G. (2011b): *Puntos fijos en espacios nucleares*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XLV. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/FILE/(2011)ANCBA.Olivera(2).ant.pdf

Olivera J. H. G. (2013): *La transformación de Fourier de espacios nucleares*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XLVII. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/FILES/Anales-2013.pdf

Olivera J. H. G. (2014): *Linealidad y convolución en espacios nucleares*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XLVIII. pp. 325-327. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/FILES/Anales2014.pdf

Scwartz, L. (1966): *Théorie des Distributions*. Hermann, Paris.

Tréves, F. (1967): *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press. New York.

Zalduendo, I. (1999): *Ceros en polinomios sobre espacios de Banach*. Anales de la Academia Nacional de Ciencias de Buenos Aires XXXIII. Recuperado de: http://www.ciencias.org.ar/user/files/ZALDUENDO99.pdf

## APÉNDICE

Las distribuciones o funciones generalizadas de Schwartz son funcionales lineales continuas sobre un espacio de "funciones de prueba". Los más importantes para el presente trabajo son tres:

- El espacio de distribuciones $D'$, conformado por todas las funcionales lineales continuas sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto $D'$.
- El espacio de distribuciones $E'$, conformado por todas las funcionales lineales continuas con soporte compacto sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables con soporte arbitrario $E$.
- El espacio de distribuciones temperadas (o de crecimiento lento) $S'$, conformado por todas las funcionales lineales continuas con soporte compacto sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables de decrecimiento rápido $S$.

Por definición se sigue que $E \supset S \supset D$, de lo cual se sigue $D' \supset S' \supset E'$, todos ellos espacios vectoriales topológicos, es decir espacios vectoriales en los cuales las operaciones usuales de suma y multiplicación por escalares son operaciones continuas.

Los espacios de distribuciones tienen varias propiedades topológicas deseables, cuya enumeración va más allá del objetivo del presente trabajo. Tal vez la más importante de todas ellas desde el punto de vista de su implicancia en las aplicaciones económicas sea la llamada propiedad de Heine Borel, que dice que sobre conjuntos cerrados, los conjuntos acotados son también compactos.

En lo que respecta a la derivación de distribuciones, toda función $f$ localmente integrable define una distribución $T_f$ mediante la expresión $\langle T_f, \phi \rangle = \int f(x)\phi(x)dx$, donde $\phi \in D$, con lo cual su derivada distribucional se define siguiendo la fórmula de integración por partes

$$\langle T_f{}', \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\phi(x)dx = [f(x)\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)dx$$
$$= -\langle T_f, \phi' \rangle.$$

De esta manera, toda función localmente integrable $f$ tiene derivada distribucional independientemente de que la tenga o no como función, dado que la "operación de derivación" la carga la función de prueba. Así puede definirse una derivada distribucional de todos los órdenes de una función con la única exigencia de que sea localmente integrable. En general, y teniendo en cuenta la expresión anterior, la derivada distribucional se definirá mediante la igualdad $\langle T_f{}', \phi \rangle \equiv -\langle T_f, \phi' \rangle$. Además, cuando la función $f$ tiene derivada ordinaria, coincide con su derivada distribucional.

Luego de esta muy breve presentación, reseñamos los teoremas matemáticos y corolarios vinculados a los espacios de distribuciones que fueran demostrados por Olivera desde 1998 en adelante.

Notación:

- $N$: Conjunto de números naturales.

- $R$: Conjunto de números reales.
- $D'$: espacio de distribuciones.
- $E'$: espacio de distribuciones con soporte compacto.
- $S'$: espacio de distribuciones temperadas.
- $B$: conjunto acotado en $D'$.
- $B^{00}$: bipolar de $B$.
- $C$: cápsula lineal de $B^{00}$ con la topología de subespacio de $D'$.
- $D_I$ : espacio de funciones de valor complejo infinitamente diferenciables sobre el intervalo real $(-1, 1)$ extensibles continuamente junto con todas sus derivadas a $[-1, 1]$.
- $M$: conjunto de índices.
- $T \equiv (D_I)^M$.
- $j$: Homeomorfismo lineal de $C$ en $T$.
- $A$: subálgebra cerrada más pequeña tal que $j(C) \subset$ A.
- $s$: espacio de sucesiones rápidamente decrecientes.
- $X_1$: espacio de distribuciones considerado como álgebra topológica.
- $X_2$: espacio de distribuciones reales considerado como álgebra topológica.
- $X_3$: subálgebra generada por $B$.
- $F_1$: conjunto de homomorfismos de $X_1$ en el cuerpo de números complejos.
- $F_2$: conjunto de homomorfismos de $X_2$ en el cuerpo de números reales.
- $F_3$: conjunto de homomorfismos de $X_3$ en el cuerpo de coeficientes.

Entonces,

- $E'$ y $S'$ son bornológicos (Olivera 1998, Teorema 1).
- $D'$ es bornológico (Olivera 1998, Teorema 2).
- $C$ es bornológico (Olivera 1998, Teorema 3).
- Si $C$ es cerrado en $D'$, su dimensión es finita (Olivera 1998, Teorema 4).
- $B$ es metrizable (Olivera 1999a, Teorema 1; Olivera 1999b, Teorema 1).
- $B$ es separable (Olivera 1999a, Teorema 1, continuación).
- La aplicación identidad puede ser aproximada, uniformemente sobre todo conjunto acotado en $C$, por aplicaciones lineales continuas de rango finito (Olivera 1999a, Teorema 2).
- Si $C$ es un espacio de Baire, su dimensión lineal, como así también la dimensión lineal de $B$, es finita (Olivera 1999a, Teorema 3).
- Si $C$ es cerrado en $D'$, entonces $C$ tiene dimensión lineal finita (Olivera 1999a, Teorema 4).
- Todo preorden normal y continuo en $B$ admite una representación numérica continua (Olivera 1999a, Teorema 5).
- Si $\bar{B}$ posee un orden continuo y completo, entonces es isomórfico en orden y homeomorfico a un conjunto compacto de números reales (Olivera 1999a, Teorema 6).
- Un subconjunto acotado de $D'$ canónicamente ordenado es acotado (Olivera 1999a, Teorema 7).
- $C$ es metrizable y nuclear (Olivera 1999b, Teorema 2).
- El dual fuerte de $C$ es fuertemente nuclear y completo (Olivera 1999b, Teorema 3).
- El bidual es linear-homeomorfo a un subespacio cerrado de $T$ (Olivera 1999b, Teorema 4).
- $A$ es un álgebra $T_2$, conmutativa, localmente m-convexa (Olivera 2000, Teorema 1).
- Las unidades de $A$ forman un conjunto abierto (Olivera 2000, Teorema 2).
- $A$ es un álgebra bornológica (Olivera 2000, Teorema 3).
- $T$ y su dual fuerte $T'$ son espacios completos (Olivera 2001, Teorema 1).

- $T$ y su dual fuerte $T'$ son espacios de Montel (Olivera 2001, Teorema 2).
    - $T$ es el dual fuerte de $T'$ (Olivera 2001, Corolario 1).
    - En $T$ y $T'$ hay identidad entre conjuntos acotados y conjuntos relativamente compactos (Olivera 2001, Corolario 2).
    - Sobre conjuntos acotados de $T$ y $T'$ coinciden las topologías fuerte y débil (Olivera 2001, Corolario 3).
    - Sea $Y$ un espacio localmente convexo. Toda aplicación bilineal de $T \times T'$ en $Y,$ separadamente continua, es hipocontinua (Olivera 2001, Corolario 4).
- Con la multiplicación usual de funciones, efectuada componente a componente, $T$ es un álgebra localmente m-convexa (Olivera 2001, Teorema 3).
- Existe un espacio de Banach $E$ tal que $B^{00}$ es isométrico a un subespacio de $E$ (Olivera 2006, Teorema).
- $C \subset s$ (Olivera 2006, Teorema 1).
    - $C \subset D_I$ (Olivera 2006, Corolario 1).
- El álgebra $a(B)$ generada por $B$ en $D_I$ es funcionalmente continua (Olivera 2006, Teorema 2).
    - Los polinomios en los homomorfismos complejos en $a(B)$ definen funciones continuas sobre $B$ (Olivera 2006, Corolario 2).
- Existe un conjunto $M$ tal que $D'$ es linealmente homeomorfo al espacio $(D_I)^M$. (Olivera 2008, Teorema 1).
- El conjunto de índices $M$ satisface las relaciones numéricas $Card\, N < Card\, M < Card\, R$ (Olivera 2008, Teorema 2).
- $D'$ con la multiplicación inducida por $(D_I)^M$ es un álgebra funcionalmente continua (Olivera 2008, Teorema 3).
    - El conjunto de homomorfismos complejos de álgebra $D'$ está contenido en ella (Olivera 2008, Corolario).
- Todo polinomio sin términos constante con relación a $F_1$ se anula sobre un ideal cerrado de dimensión infinita (Olivera 2009, Teorema 1; 2005, Teorema 1).
- Todo polinomio sin términos constante con relación a $F_2$ se anula sobre un ideal cerrado de dimensión infinita (Olivera 2009, Teorema 2; 2005, Teorema 2).
- Si $B$ es de dimensión lineal infinita, todo polinomio sin término constante con relación a $F_3$ se anula sobre un ideal cerrado, metrizable y separable, de dimensión infinita (Olivera 2009, Teorema 3; 2005, Teorema 3).
- Los tres teoremas anteriores valen igualmente para las distribuciones con soporte compacto y las distribuciones temperadas (Olivera 2009, Teorema 4; 2005, Teorema 4).
- Para cualquier distribución $f$, la ecuación diferencial no homogénea $dg/dt = f$ posee solución en el espacio $D'$ (Olivera 2010, Teorema 1).
- Sean $g$ y $h$ dos soluciones de la ecuación diferencial no homogénea $dg/dt = f$. Si $g(t) = h(t)$ en un punto del segmento $[-1, 1]$, entonces $g = h$ (Olivera 2010, Teorema 2).
- La solución $g$ de la ecuación diferencial no homogénea $dg/dt = f$ depende en forma continua tanto de $f$ cuanto de la condición inicial $g(t_0) = x_0$ (Olivera 2010, Teorema 3).
- Si $f$ es una distribución con soporte compacto o de crecimiento lento, los tres teoremas anteriores se aplican a $E'$ y $S'$ respectivamente (Olivera 2010, Teorema 4).
- Todo conjunto acotado maximal de distribuciones tiene la propiedad de punto fijo (Olivera 2011a, Teorema).
    - Toda contracción $hK$, $0 < |h| < 1$, de un conjunto acotado maximal de distribuciones $K$ tiene la propiedad de punto fijo (Olivera 2011a, Corolario).
- Todo subconjunto acotado de un espacio nuclear cuasicompleto es completamente separable (Olivera 2011b, Lema).

- Todo conjunto acotado maximal de un espacio nuclear cuasicompleto tiene la propiedad de punto fijo (Olivera 2011b, Teorema).
- La transformación de Fourier es aplicable a todo espacio nuclear (Olivera 2013, Teorema 1).
- En cada espacio nuclear la transformación de Fourier define un isomorfismo topológico (Olivera 2013, Teorema 2).
- El producto de convolución de dos elementos $\nu$ y $\omega$ de un espacio nuclear definido como $\nu * \omega \equiv F^{-1}\big(F(\nu), F(\omega)\big)$, donde $F$ es la transformación de Fourier sobre dicho espacio, es conmutativo, asociativo y distributivo respecto de la suma (Olivera 2014, Teorema 1).
- Sea $K$ un espacio nuclear. Todo operador de convolución sobre $E'$ induce un operador de convolución sobre $K$ (Olivera 2014, Teorema 2).